纽约州

学前班至 12 年级共同核心

数学教学标准

本文件包含所有《数学共同核心州立标准》以及纽约州的增补建议。
纽约州数学共同核心工作组的所有增补建议均已纳入本文件，建议
在相关部分中以黄色背景突出显示。

目录

导论

通向更佳的专注性与连贯性

> *幼儿教育中的数学学习应集中在（1）数字（包括整数，运算和关系）和（2）几何，空间关系和测量方面，较其它主题而言，数学学习时间应更多地集中在数字方面。数学过程目标应该与这些方面的内容进行融合。*
>
> ——《幼儿数学学习》，美国国家研究委员会，2009 年

> *[香港，韩国和新加坡] 的综合标准具有许多特征可供借鉴，能够充实美国的国际基准参照过程，促进幼儿园至 6 年级数学标准的发展。首先，综合标准将早期数学学习集中在数字，测量和几何方面，较少强调数据分析，几乎不会涉及代数。香港 1-3 年级的标准将几乎一半的目标时间集中在数字方面，几乎所有的剩余时间都集中在几何和测量方面。*
>
> ——Ginsburg，Leinwand 和 Decker，2009 年

> *因为 [美国] 教材中的数学概念往往很弱，表达变得比较僵化，远远谈不上理想。我们审视了美国使用的传统和非传统教材，在二者中均发现了这类概念性弱点。*
>
> ——Ginsburg 等人，2005 年

> *有许多方式可以用来组织课程。而如今难以解决的挑战则是如何避免那些歪曲数学和令学生厌烦的方式。*
>
> ——Steen，2007 年

十多年来，对数学优异国家的数学教育研究表明，为了提高美国的数学成就，美国的数学课程必须进行大幅变革，变得更为专注和连贯。为了兑现共同标准的承诺，标准必须解决课程“泛而不深”的问题。本标准便是对这一问题的实质性回应。

我们必须认识到“更少的标准”并不能替代“专注的标准”，这十分重要。达成“更少的标准”较为容易，采用宽泛，笼统的陈述即可。正好相反，清晰和具体则是本标准奉行的宗旨。

评估一套标准的连贯性比评估其侧重点更加困难。William Schmidt 和 Richard Houang （2002）指出，内容标准和课程如果具备下列情形，则可视为连贯：

> *作为一个符合逻辑的主题和表演序列逐步进行阐明，并在适当的情况下，反映出科目引用的学科内容的连续性和层次性。也就是说，教学的内容和方式，既需反映出某些学科范畴的主题，亦需反映出确定如何组织和产生学科知识的主要概念。这意味着，“为了保持连贯”，一套内容标准必须从具体细节（例如，整数的含义和运算，包括简单的数学口诀以及与整数和分数相关的常用计算步骤）引申至更深层次的学科内在结构。这些更深层次的结构则会作为串连具体细节（如对有理数系统及其属性的理解）的方式。*（增加了重点）

本标准努力致力于遵循这样的设计，不仅强调对主要概念的概念性理解，而且会通过不断回顾数位和算术法则等组织原则来解构这些概念。

此外，在一个数学标准框架内概述出来的“主题和表演的序列”还必须尊重已知的学生学习方式。正如 Confrey （2007 年）所指出的，“在对仔细研究学习过程的意义缺乏了解的情况下……为学生设计序列化障碍和挑战，是不幸且不明智的行为。”因此，本标准的编制以研究性学习进程作为起点，详细阐述了如今已经掌握的关于学生的数学知识，技能和理解会如何随着时间而发展的知识。

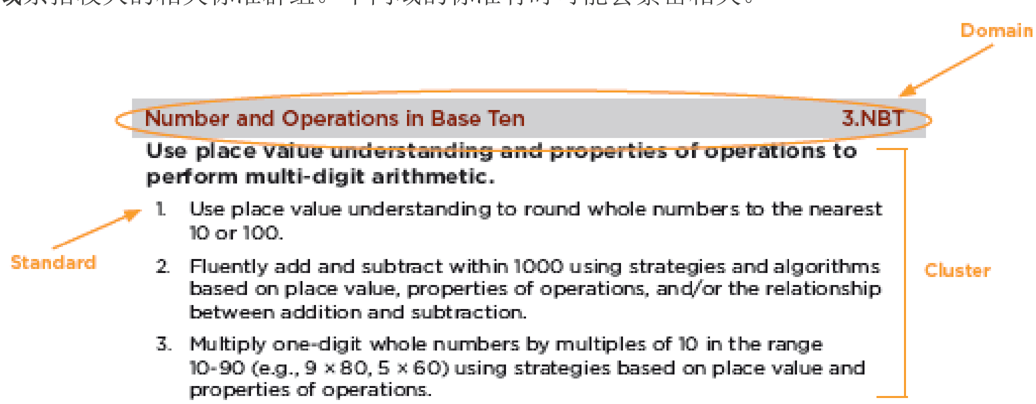
理解数学

本标准定义了学生在数学学习中应该理解以及能够做到的内容。要求学生理解事物，意味着需要老师来评估学生是否已经理解。但数学理解究竟是什么样的？数学理解的标志之一便是，以适合学生数学成熟度的方式证明为何某一具体数学陈述正确或某个数学定律源自何处的能力。一个能够运用记忆法分解诸如 $(a+b)(x+y)$ 之类乘积的学生与一个能够解释该记忆法缘由的学生之间存在着天壤之别。能够解释规则的学生理解了数学逻辑，在遇到不太熟悉的任务时，如分解 $(a+b+c)(x+y)$，成功解答的机会可能会更大。数学理解和程序性技巧都同样重要，二者均可通过充足的数学任务进行评估。

本标准设置了针对具体年级的标准，但并未定义为远远低于或高于年级水平期望的学生提供支持所需的干预方法或材料。定义适合英语语言学习者和特殊需求学生的全面支持亦不在本标准的范围之内。同时，如果所有学生都希望对高中毕业后的生活所需的知识和技能进行评估，他们必须拥有学习和达到同样的高标准的机会。本标准应解读为允许广泛的学生从一开始便全面参与，同时提供了适当的建议，以确保具有特殊教育需求的学生的最大参与度。例如，针对身有残疾的学生，阅读时应采用盲文，屏幕助读技术或其它辅助性设备，而写字时应采用划线器，电脑或语音到文本转换技术。同理，听，说应广泛采纳手语。没有任何年级标准能够完全反映出任何某个特定班级的学生在能力，需求，学习速度和成绩水平方面的巨大差异。然而，本标准为所有学生在通往大学和就业准备目标的道路上提供了清晰的路标。本标准以数学实践的八个标准作为开始，可在此查看。

如何阅读年级标准

标准定义了学生应该理解和能够做到的内容。
群组是对相关标准组的概括。注意不同群组的标准有时可能会紧密相关，因为数学是一门内在关联密切的学科。
域系指较大的相关标准群组。不同域的标准有时可能会紧密相关。



本标准并未强制规定课程或教学方法。例如，在某个年级的标准中，A 主题出现在 B 主题之前，但并不意味着 A 主题必须在 B 主题之前进行教学。教师可以选择先教 B 主题，再教 A 主题，或者 A，B 主题同时教授，以突出二者之间的联系。亦或，教师可以教授自己选择的主题，作为副产品，这样的主题应引导学生达到 A 主题和 B 主题的标准。

学生在特定年级能够学到的东西取决于他们之前学习的内容。理想情况下，本文件的每项标准可能会被表述为："已经理解 A 的学生下一步应该开始学习 B。"但目前这一方法并不现实，在一定程度上是因为现有的教育研究不能详细阐述出这种类型的所有学习路径。因此，基于全美和国际比较以及教育者，研究者和数学家的集体经验和集体专业判断，具体主题必然会进行年级安排。共同州立标准的承诺之一是，允许逐步对学习进程进行研究，以便最大程度地充实和改善标准的设计。不同的学校和学校体系之间的学习机会仍然会不尽相同，教育者们应根据个体学生当前的理解能力，尽最大努力满足他们的需求。

本标准并不打算"新瓶装旧酒，换汤不换药"，而是旨在呼吁采取下一步行动。时机已至，各州应从过去二十年基于标准的改革中吸取教训，紧密合作，继往开来。大家是时候应该认识到，这些标准不仅是对我们孩子们的承诺，也是我们希望一直履行的承诺。

数学：数学实践标准

该数学实践标准描述了各个年级数学教育者们应该努力培养学生们具备的各种专门技能。这些实践基于数学教育中意义深远的重要"过程和素养"。首先是美国国家数学教师理事会（NCTM）关于问题解决，推理和证明，沟通，陈述和进行联系的过程标准。其次是美国国家研究委员会报告《*加起来（Adding It Up）*》中提出的数学素养的五项能力：适应性推理，策略性能力，概念性理解（对数学概念，运算和关系的理解力），程序性流畅（灵活，准确，高效并恰当地执行程序的技能）和建设性倾向（认为数学合理，有用且值得付出，而且秉持勤勉和自信之信念的习惯性倾向）。

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。

具备数学素养的学生遇到数学问题时，会自发解析题目的含义并寻找解题的切入点。他们会分析已知条件，约束条件，关系和目标。他们会对答案的形式和含义进行推测，并会规划解题思路，而不是盲目地尝试解题。他们会思考类似的问题，尝试特殊情况并简化原始问题的形式，以深入了解其答案。他们会对进展情况进行监控和评估，如有必要，随时改变策略。根据问题的内容，高年级的学生会变换代数表达式或切换其图形计算器的查看窗口，以获取他们需要的信息。具备数学素养的学生能够解释方程式，口头描述，表格和图形之间的对应关系，或者绘制重要特征和关系的图表，绘制数据图形，并寻找规律和趋势。低年级的学生可以依赖具体物体或图片的运用，帮助其理解概念，寻找解题思路。具备数学素养的学生会使用不同的方法检查他们的题目答案，他们会不断问自己，"这样做合理吗？"他们能够理解他人解决复杂问题的方法，并能确定不同方法之间的对应关系。

2. 抽象和定量推理。

具备数学素养的学生会去理解数量的意义以及它们在问题情境中的关系。他们具备两种涉及定量关系问题的互补能力：*去情境化*能力——将给定情境抽象化，以数理符号取而代之，并对代表符号进行运算，好似这些符号都拥有自己的生命，却不必去注意其所指代的对象，而*恢复情境化*能力则会在运算过程中根据需要不时进行暂停，以便探讨所涉及的符号的指代对象。定量推理会形成一些习惯，即：为现有问题创建连贯的表述；考虑涉及数量的单位；注重数量代表的含义，而非仅是如何计算它们；以及了解并灵活运用不同的运算律和对象。

3. 建立可行的论点并评析他人的推理。

具备数学素养的学生能够理解并运用已知假设，定义和之前确定的结果来构建论据。他们会进行推测，并建立合理的渐进式陈述来探索真相，进而证明其推测。他们能够将情境分解为个案进行分析，并能识别和使用反例。他们会证明自己的结论，并就结论与他人进行沟通，也可回答他人的质疑。他们会对数据进行归纳推理，考虑数据在题目中的前后关系，进行似真论证。具备数学素养的学生还能比较两个似真论证的效力，区分哪个是正确的逻辑或推理，哪个是有误的，并解释误在何处（如果论证有误）。小学生可以使用物品，图画，图表和动作等参照对象来构建论据。这种举证方式虽然要到高年级才会进行

归纳或作为正式数理论据，但却不失理性和真确。之后，学生们会学习如何确定论据所属的域。所有年级的学生都能聆听或读懂别人的论证，决定是否有道理，并提出有用的问题来澄清或改善这些论证。

4. 数学模型。

具备数学素养的学生能够应用他们知道的数学知识来解决在日常生活，社会和工作场所中遇到的问题。在低年级，这非常简单，如列出加法等式来描述一个情境。中年级的学生，可以利用比例推理来规划学校的活动或分析社区中的问题。到了高中，学生可以使用几何知识来解决设计问题或使用函数来描述一个数量依赖于另一个数量的关系。具备数学素养的学生可以运用他们知道的知识轻松作出假设和近似值，以简化复杂的情况，并认识到这些假设和近似值之后可能需要修订。他们能够识别实际情况中的重要数量，并使用图表，双向表，曲线图，流程图和公式来表达它们之间的关系，进而运用数学模型来分析这些关系并作出结论。他们经常性地将其数学结果至于情境背景中进行解读，并反思结果是否合理，如果没有达到其目的，则改善原有的模型。

5. 策略性地使用适当的工具。

具备数学素养的学生在解数学题时，会考虑选择可用的工具。这些工具包括铅笔和纸，具体模型，尺子，量角器，计算器，电子表格，计算机代数系统，统计软件或动态几何软件。具备素养的学生非常熟悉适合他们年级或课程的工具，知道何时利用何种工具才会有用，也了解这些工具的优点及其局限性。例如，具备数学素养的高中学生能够分析使用图形计算器生成的函数图形和答案。他们可以策略性地使用估算和其它数学知识来检测可能出现的错误。创建数学模型时，他们知道使用科技来帮助他们将不同的假设结果可视化，探索可能的结果，并用数据来比较预测值。具备数学素养的学生，无论在哪个年级，均能识别相关的课外数学资源，如网络上的数字内容，并利用它们来提出或解决问题。他们能够使用技术工具探索和深化他们对概念的理解。

6. 注重精确性。

具备数学素养的学生会尝试以精确的方式与他人沟通。他们在与他人的讨论中以及在自己的推理中会尝试使用明确的定义。他们会表达自己选择的符号的含义，包括一致并适当地使用等号。他们会谨慎指定计量单位，并标注坐标轴以澄清问题中的数量对应关系。他们会准确，有效地进行计算，以适合问题背景的数值精度来表达数字答案。在小学年级阶段，学生能够相互给出组织严谨的解释。到高中时，他们会学会检查声明，并能明确使用定义。

7. 寻找并利用结构。

具备数学素养的学生会仔细推敲，以辨别出模式或结构。例如，小学生可能会注意到，三加七和七加三的和相等，或者他们可能会根据图形有几条边来对图形进行分类。之后，他们将意会到 7×8 的乘积与 $7 \times 5 + 7 \times 3$ 相等，这种认知会为学习分配律打下基础。在 $x^2 + 9x + 14$ 表达式中，高年级的学生能够将 14 分解为 2×7，将 9 分解为 $2 + 7$。他们会认识到几何图形中现有线条的重要性，并且能够使用绘制辅助线的策略来解决问题。他们还能退一步探索问题的整体概述并转变分析问题的视角。他们能够将复杂的问题视为一个整体或是几个单项的结合，比如一些代数表达式。例如，他们可以将 $5 - 3(x - y)^2$ 理解为 5 减去一个正数乘以一个平方，并用此得出，假如 x 和 y 为实数，这个算式的值不可能大于 5。

8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

具备数学素养的学生会留意到重复计算，并会尝试找出一般方法和快捷方法。小学高年级的学生可能会注意到，25 除以 11 时，他们会一遍又一遍地重复相同的计算，所以得出结论商是一个循环小数。在反复检查某个点是否在斜率为 3 且通过（1, 2）的直线上时，中学生会注意到斜率的计算，并可能会提炼出公式 $(y - 2)/(x - 1) = 3$。当展开乘积 $(x - 1)(x + 1)$，$(x - 1)(x^2 + x + 1)$ 和 $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ 时，通过消减正反项观察规律，可能会得出几何级数总和的一般公式。在解决一个问题时，具备数学素养的学生会在注重细节的同时，保持着对过程的监督 。他们会不断地评估中间结果的合理性。

数学实践标准与数学内容标准的结合

正在成长中的数学学科学生践行者们，会随着数学成熟度和知识在小学，中学和高中阶段的不断增长，以数学实践标准中描述的方式，逐步参与到这个科目中。课程，评测和专业发展的设计者们均应注重在数学教学中将数学实践与数学内容相结合的需求。

数学内容标准是程序和理解的平衡组合。以“理解”开始的期望值，对实践与内容的结合而言，通常都是绝好的机会。对某个主题缺乏理解的学生可能会过度依赖程序。如果缺少灵活的工作基础，他们不太可能会考虑类似的问题，连贯地表述问题，证明结论，将数学知识应用到实际情境，有意地利用科技进行数学计算，准确地向他人解释数学，退一步观察整体情况或者偏离已知程序另辟捷径。简而言之，缺乏理解会大大阻碍学生参与数学实践。

在这方面，设置了理解期望值的那些内容标准是数学内容标准与数学实践标准之间的潜在“交点”。这些交点将偏重于学校数学课程中的核心和衍生概念，而此类概念最值得投入定性改善数学课程，教学，评估，专业发展和学生成绩所需的时间，资源，创新力和关注。

数学 - 学前班：导论

在学前班，教学时间应当专注于两个关键领域：（1）利用实物培养对整数的认识，包括对应关系，计数，基数和比较的概念；（2）描述环境中的形状。在学前班，相比其它主题而言，更多的学习时间应放在培养数字的概念上。

（1）学生形成对整数含义的理解，通过数数辨认出一小组物体的数量——首个数学算法，也是最基础的数学算法。他们应理解数字单词表示的是数量。他们会通过配对比较数量以及数物体数到 10，运用一一对应关系来解决问题。他们应理解，他们数数时数到的最后一个数字表示“多少”，之所以数数，是为了确定数量和比较数量（使用“大于”和“小于”等语言）。

（2）学生们会使用几何概念（如形状和空间关系）和词汇来描述他们的自然世界。他们可以识别基本的二维形状并能说出其名称，例如三角形，长方形，正方形和圆形。他们会使用基本形状和空间推理来将自然环境中的物体模型化。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

学前班纲要

计数和基数
- 知道数字名称和数数序列。
- 数物体，说出物体的数量。
- 比较数字。

运算与代数思维
- 理解加法是指添加，理解减法是指取出。理解简单的模式。

测量和数据
- 描述并比较可测量的属性。
- 将物体归类，并数出每个类别中的物体数量。

几何
- 识别并描述形状（正方形，圆形，三角形，长方形）。
- 分析，比较并将物体归类。

计数和基数 PK.CC

知道数字名称和数数序列。

1. 数到 20。
2. 用书面数字 0 – 5 表示物体的数量（0 表示没有数任何物体）。

数物体，说出物体的数量。

3. 理解 10 以内的数字和数量之间的关系；将数数与基数相联系。
    a. 数物体时，以标准顺序说出数字名称，将每个物体与一个唯一的数字名称配对，将每个数字名称与一个唯一的物体配对。
    b. 理解最后一个说出的数字名称即表示计数物体的数量。无论物体怎么放置或数数时按照什么顺序，物体的数量都是一样的。
    c. 理解每个连续的数字名称均表示大一的数量。
4. 将 10 个以内的物体放置在一条线上，一个矩形或一个圆形内，或将 5 个以内的物体分散放置，通过数数来回答“有多少个？”之类的问题；给出一个 1 – 10 之间的数字，然后数出相应数量的物体。

比较数字。

5. 识别一组物体的数量是否多于，少于，大于，小于和/或等于另一组物体的数量，如采用匹配和数数策略。1（1：5 以内的物体）
6. 识别与顺序或位置相关的“第一个”和“最后一个”。

运算与代数思维 PK.OA

理解加法是指添加，理解减法是指取出。

1. 通过使用物体，手指以及回答实际情境，展示对加法和减法的理解（例如，我们有 3 个苹果，又添加了两个，我们一共有多少个苹果？）。

理解简单的模式。

2. 使用实物重复并扩展（例如，下一个是什么？）简单的模式。

测量和数据 PK.MD

描述并比较可测量的属性。

1. 识别物体的可测量属性，如长度和重量。使用正确的词汇来描述它们（例如，小，大，矮，高，空，满，重和轻）。

将物体归类，并数出每个类别中的物体数量。

2. 将物体归类，并数出每个类别中的物体数量。1（将类别数量限制在小于或等于 10）

几何 PK.G

识别并描述形状（正方形，圆形，三角形，长方形）。

1. 使用形状的名称来描述环境中的物体，并用顶部，底部，上，下，前面，后面，上方，下方和旁边等词汇来描述这些物体的相对位置。
2. 正确说出形状的名字，无论尺寸大小。

分析，比较并将物体归类。

3. 分析，比较二维及三维形状和物体，并将其按照不同的尺寸进行归类，使用口语来描述它们的相似性，区别和其它属性（例如，颜色，尺寸和形状）。
4. 使用零件（如棍子和粘土球）来创造和建造形状。

数学 - 幼儿园：导论

在幼儿园，教学时间应当专注于两个关键领域：（1）表示和比较整数，以多组物体开始；（2）描述形状和空间。在幼儿园，相比其它主题而言，更多的学习时间应放在数字方面。

1. 学生会使用数字，包括书面数字，表示数量和解决数量问题，例如数出一组物体的数量；数出给定数量的物体；比较分组或数字；使用物体分组模型化简单的合并和分拆情境，或最终使用等式，例如 5 + 2 = 7 和 7 – 2 = 5。（幼儿园学生应观察加法和减法等式，鼓励幼儿园学生写出等式，但并不强制要求。）学生能够选择，组合并运用有效的策略来回答数量问题，包括快速辨认以及小组物体的基数，数出并按照给定大小分组，数出合并组中的物体数量，或数出从一组中取出部分后剩下的物体数量。
2. 学生们会使用几何概念（如形状，方向，空间关系）和词汇来描述他们的自然世界。他们能够识别，命名并描述二维形状，如正方形，三角形，圆形，长方形和六边形，并以各种各样的方式表示出来（例如，不同的尺寸和方向），以及三维形状，如立方体，锥形，圆柱形和球形。他们会使用基本形状和空间推理来将自然环境中的物体模型化，并构建更加复杂的形状。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

幼儿园纲要

计数和基数
- 知道数字名称和数数序列。
- 数物体，说出物体的数量。
- 比较数字。

运算与代数思维
- 理解加法是指放在一起和添加，理解减法是指分开和取出。

十进制数字和运算
- 学习数字 11 – 19，为数位的学习打下基础。

测量和数据
- 描述并比较可测量的属性。
- 将物体归类，并数出类别中的物体数量。

几何
- 识别并描述形状。
- 分析，比较，创建和构造图形。

计数和基数 K.CC

知道数字名称和数数序列。

1. 以一和十为单位分别数到 100。
2. 从给定的数字开始按照已知的顺序向前数数（而非从 1 开始数）。
3. 书面数字，从 0 写到 20。用书面数字 0 – 20 表示物体的数量（0 表示没有数任何物体）。

数物体，说出物体的数量。

4. 理解数字和数量之间的关系；将数数与基数相联系。
   a. 数物体时，以标准顺序说出数字名称，将每个物体与一个唯一的数字名称配对，将每个数字名称与一个唯一的物体配对。
   b. 理解最后一个说出的数字名称即表示计数物体的数量。无论物体怎么放置或数数时按照什么顺序，物体的数量都是一样的。
   c. 理解每个连续的数字名称均表示大一的数量。
   d. *形成对序数（从第一到第十）的理解，以描述相对位置和整数的量。*
5. 将 20 个以内的物体放置在一条线上，一个矩形或一个圆形内，或将 10 个以内的物体分散放置，通过数数来回答“有多少个？”之类的问题；给出一个 1 – 20 之间的数字，然后数出相应数量的物体。

比较数字。

6. 识别一组物体的数量是否大于，小于或等于另一组物体的数量，如采用匹配和数数策略。[1]
7. 比较以书面数字表示的 1 到 10 之间的两个数字。

[1] 包括十个以内物体的组。

运算与代数思维 K.OA

理解加法是指放在一起和添加，理解减法是指分开和取出。

1. 用物体，手指，意识图象，图画 [1]，声音（如掌声），情境表演，口头解释，表达式或等式表示加法和减法。
2. 解加法和减法文字题，10 以内的加减法，如利用物体或图画来表述问题。
3. 使用物体或图画等以一种以上的方式将 10 以内的数字拆分成对，并用图画或等式（如 5 = 2 + 3 和 5 = 4 + 1）记录每一个分解。
4. 在 1 到 9 之间的任何数字中，使用物体或图画等找出与给定数字相加的和等于 10 的数字，并用图画或等式记录答案。
5. 熟练地进行 5 以内的加减法。

[1] 图画不需显示细节，但应显示问题中的数学运算。（这适用于本标准中提及到图画的所有部分。）

十进位制数字和运算 K.NBT

学习数字 11-19，为数位的学习打下基础。

1. 使用物体或图画等将 11 至 19 之间的数字组合和分解为十个一和更多的一，并用图画或等式（如 18 = 10 + 8）记录组合或分解的结果；理解这些数字是由十个一和一，二，三，四，五，六，七，八或九个一组成的。

测量和数据 K.MD

描述并比较可测量的属性。

1. 描述物体的可测量属性，如长度或重量。描述单个物体的多项可测量属性。
2. 用共同的可测量属性直接比较两个物体，看看哪个物体的属性“更大”/“更小”，并描述差异。*例如，直接比较两个孩子的身高，并描述哪个较高/较矮。*

将物体归类，并数出每个类别中的物体数量。

3. 将物体分为给定数量的类别；数出每个类别中的物体数量，并按数量[1]对类别进行排序。

[1]将类别数量限制在小于或等于 10。

几何 K.G

识别并描述形状（正方形，圆形，三角形，长方形，六边形，立方体，锥形，圆柱形和球形）。

1. 使用形状的名称来描述环境中的物体，并用*上方，下方，旁边，前面，后面和紧邻*等词汇来描述这些物体的相对位置。
2. 正确说出形状的名字，不论其方向或整体尺寸。
3. 辨别形状属于二维（在一个平面内，“平的”），还是三维（“立体的”）。

分析，比较，创建和构造图形。

4. 分析和比较不同尺寸和方向的二维及三维形状，使用口语来描述它们的相似性，区别，构成部分（例如，边和顶点/“角”的数量）和其它属性（例如，具有相同长度的边）。
5. 使用零件（如棍子和粘土球）和图纸形状来建造形状，制作现实世界中的模型形状。
6. 组合简单的形状，以形成较大的形状。*例如，“你能在所有边都相互接触的情况下将这些三角形连接成一个长方形吗？”*

数学 - 1 年级：导论

在 1 年级，教学时间应当专注于四个关键领域：（1）形成对 20 以内的加减法以及加减法策略的理解；（2）形成对整数关系和数位的理解，包括十位和个位的分组；（3）形成对线性测量的理解并以迭演长度单位进行长度的测量；以及（4）对几何形状的属性进行推理，并进行几何形状的组合和分解。

1. 学生会根据他们之前对较小数字的运算制定整数加减法的策略。他们可以运用不同的模型，包括离散的对象和基于长度的模型（如立方体连接起来形成长度），以便将添加，取出，放在一起和分开模型化，并比较各种情形，以理解加减法运算的含义以及利用这些运算解决算术问题的策略。学生能够理解计数和加减法之间的关系（例如，加二与数两次相同）。他们运用加法的性质进行整数的相加，并根据这些性质逐渐建立并使用复杂的策略（例如，凑十），来解决 20 以内的加减法问题。通过比较不同的解题策略，孩子们会形成对加减法关系的理解。

2. 学生们会制定，讨论和使用有效，准确且可归纳的方法进行 100 以内的加法以及整 10 数的减法。他们能够比较整数（至少到 100）以形成对其相对大小的理解，并解决相关的问题。他们会以十位和个位的方式思考 10 到 100 之间的整数（尤其是将 11 至 19 之间的数字理解为由一个十和几个一组成）。通过建立数感的活动，他们能够理解序数的顺序以及其相对值。

3. 学生形成对测量含义和过程的理解，包括迭演（利用相同大小的单位来构造物体长度的心理活动）和间接测量的传递性原则等基本概念。[1]

4. 学生能够组合和分解平面和立体图形（例如，将两个三角形放在一起组成一个四边形）并建立对部分-整体关系以及原形状和组合形状的属性的理解。当他们组合形状时，他们能够从不同的视角和方向辨别这些形状，描述它们的几何属性，并确定它们之间的相似性和区别，以建立测量和初步理解全等和对称等属性的背景知识。

[1] 学生们应该应用测量的传递性原则进行间接比较，但他们不需使用这一技术术语。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

1 年级纲要

运算与代数思维
- 表述并解决涉及加减法的问题。
- 理解和应用运算律以及加减法之间的关系。
- 进行 20 以内的加减法。
- 进行加减法等式运算。

十进制数字和运算
- 扩展计数序列。
- 理解数位的概念。
- 使用数位理解和运算律来进行加减法。

测量和数据
- 间接和通过迭演长度单位测量长度。
- 说出并写出时间和货币。
- 表示和解读数据。

几何
- 使用图形及其属性进行推理。

运算与代数思维 1.OA

表述并解决涉及加减法的问题。

1. 用 20 以内的加减法来解决涉及添加，取出，放在一起，分开和比较的情境，所有位置均有未知数，例如，使用以符号表示未知数字的物体，绘图和等式来表示问题。[1]
2. 使用和小于或等于 20 的三个整数的加法解决应用题，例如，使用以符号表示未知数的物体，绘图和等式来表示问题。

理解和应用运算律以及加减法之间的关系。

3. 应用运算律作为加减法的策略。[2] *例：如果已知 8 + 3 = 11，那么亦可知 3 + 8 = 11。（加法交换律。）进行 2 + 6 + 4 加法运算时，后两个数字可先进行相加，凑成一个十，即 2 + 6 + 4 = 2 + 10 = 12。（加法结合律。）*
4. 理解减法是指一个未知加数的问题。*例如，可找出与 8 相加的和等于 10 的数字，进行 10 － 8 的减法运算。进行 20 以内的加减法。*

进行 20 以内的加减法。

5. 将计数与加法和减法相联系（例如，数到 2 表示加 2）。
6. 进行 20 以内的加减法，展示 10 以内加减法的流利程度。使用策略，如计数；凑十（例如，8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14）；分解数字以得到十（例如，13 － 4 = 13 － 3 － 1 = 10 － 1 = 9）；使用加法和减法之间的关系（例如，知道 8 + 4 = 12，即可知道 12 － 8 = 4）；创造相等但更简单或已知的和（例如，通过创造已知相等的 6 + 6 + 1 = 12 + 1 = 13 来进行 6 + 7 的加法运算）。

进行加减法等式运算。

7. 理解等号的含义，并确定涉及加法和减法的等式是否正确还是错误的。例如，下列哪个等式是正确的，哪个是错误的？6 = 6， 7 = 8 － 1， 5 + 2 = 2 + 5， 4 + 1 = 5 + 2。
8. 确定涉及三个整数的加法或减法等式中的未知整数。例如，确定使以下每个等式正确的未知数：*8 + ? = 11， 5 = _ － 3， 6 + 6 = _。*

[1] 见术语表，表 1。
[2] 学生们无需使用这些性质的正式术语。

十进位制数字和运算 1.NBT

扩展计数序列。

1. 数到 120，从小于 120 的任何数字开始。在这个范围内，读写数字，并用书面数字表示物体的数量。

理解数位的概念。

2. 理解两位数中的两个数字表示十位和个位的值。理解下列特殊情况：
   a. 10 可以视为一捆十个一——称为“十”。
   b. 11 至 19 之间的数字由一个十和一，二，三，四，五，六，七，八或九个一组成。
   c. 10，20，30，40，50，60，70，80，90 表示一，二，三，四，五，六，七，八或九个十（和 0 个一）。
3. 根据十位和个位数字的含义比较两个两位数数字，使用 >，= 和 < 符号记录比较结果。

使用数位理解和运算律来进行加减法。

4. 使用具体模型或绘图和基于数位，运算律，和/或加减法之间的关系的策略，进行 100 以内的加法，包括两位数与一位数的加法以及两位数与整 10 数的加法；将策略与书面方法相联系，并解释使用的推理。理解在两位数加法运算中，十位与十位相加，个位与个位相加；有时需要构成一个十。
5. 给出一个两位数，在不计数的情况下，心算出加 10 或减 10 的结果；解释所使用的推理。
6. 使用具体模型或绘图和基于数位，运算律和/或加减法之间的关系的策略，从 10-90 之间的整十数减去 10-90 之间的整十数（差为正数或零）；将策略与书面方法相联系，并解释使用的推理。

测量和数据 1.MD

间接和通过迭演长度单位测量长度。

1. 按照长度将三个物体排序；利用第三个物体间接比较两个物体的长度。
2. 通过将较短的物体（长度单位）端对端摆放在一起，以整数长度单位来表示物体的长度；理解物体的长度值即是中间没有空隙或重叠的相同长度单位的数量。*仅限于采用没有间隙或重叠的整数长度单位测量物体的情况。*

说出并写出时间*和货币。*

3. 使用模拟和数字时钟说出并写出整点和半点时间。***辨认和识别硬币，硬币名称及其价值。***

表示和解读数据。

4. 组织，表示并解读三个类别以内的数据；提问并回答关于数据点总数的问题，每个类别中有多少个，以及一个类别与另一个类别多或少多少个。

几何 1.G

使用图形及其属性进行推理。

1. 区分定义性属性（例如，三角形为闭合的，且拥有三条边）和非定义性属性（例如，颜色，方向，整体尺寸）；构建并绘制具有定义性属性的图形。
2. 组合二维形状（长方形，正方形，梯形，三角形，半圆形和四分之一圆形）或三维形状（立方体，正矩形棱柱，正圆锥形和正圆柱形）来创建复合形状，以及从复合形状中组合新的形状。[1]
3. 将圆形和长方形分割为两等份和四等份，使用二分之一，四分之一等词语描述份额，并使用的一半，的四分之一等短语。将整体描述为两个等份或四个等份。理解对这些例子而言分解为更多等份会产生较小的份额。

[1] 学生无需学习“正矩形棱柱”等正式名称。

数学 - 2 年级：导论

在 2 年级，教学时间应当专注于四个关键领域：（1）扩展对十进位制计数法的理解；（2）增加加法和减法的熟练程度；（3）使用标准计量单位；以及（4）描述及分析形状。

1. 学生应扩展对十进位制的理解。这包括按五，十，整百，整十和一进行计数的概念，以及涉及这些单位的数字关系，包括进行比较。学生能够理解以十进位制计数法书写的多位数（1000 以内），认识到每个数位上的数字代表千，百，十或一（例如，853 表示 8 个百 + 5 个十 + 3 个一）。

2. 学生可以利用他们对加法的理解，来培养 100 以内的加减法熟练程度。他们能够运用对加减法的理解来解决 1000 以内的问题，并利用他们对数位和运算律的理解，制定，讨论和使用有效，准确且可归纳的方法来计算十进位制整数的和与差。他们会选择并精确应用适合问题背景和所涉及的数字的方法，心算出整十数或整百数的和与差。

3. 学生能够认识到标准计量单位（厘米和英寸）的需要，并凭借对涉及单位迭演的线性测量的理解使用尺子和其它测量工具。他们能够认识到单位越小，他们就需要更多地进行迭演，以测出给定的长度。

4. 学生能够通过检查形状的边和角，对形状进行描述和分析。学生能够对通过分解和组合形状形成其它形状进行调查，描述和推理。学生能够通过构建，绘图和分析二维和三维形状，为理解高年级阶段的面积，体积，全等，相似和对称夯实基础。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

2 年级纲要

运算与代数思维
- 表述并解决涉及加减法的问题。
- 进行 20 以内的加减法。
- 练习相同的物体分组，为乘法的学习打下基础。

十进制数字和运算
- 理解数位的概念。
- 使用数位理解和运算律来进行加减法。

测量和数据
- 测量和估计使用标准单位的长度。
- 将加法和减法与长度相联系。
- 练习时间和货币。
- 表示和解读数据。

几何
- 使用图形及其属性进行推理。

运算与代数思维 2.OA

表述并解决涉及加减法的问题。

1. 用 100 以内的加减法来解决涉及添加，取出，放在一起，分开和比较情境的一步和两步应用题，所有位置均有未知数，例如，使用绘图和以符号表示未知数的等式来表示问题。[1]

进行 20 以内的加减法。

2. 熟练使用心算策略进行 20 以内的加法和减法。[2] 到 2 年级末，能够记忆所有两个一位数相加的和。

练习相同的物体分组，为乘法的学习打下基础。

3. 确定一组物体（20 以内）内的成员数量属于奇数或偶数，例如，通过配对物体 或两两计数；写出等式来表达偶数作为两个相同加数的和。
4. 使用加法来找出排列为 5 行和 5 列以内的矩形阵列的物体总数；写出等式来表达总数为相同加数的和。

[1] 见术语表，表 1。

[2] 见标准 1.OA.6 中的心算策略列表。

十进位制数字和运算 2.NBT

理解数位的概念。

1. 理解三位数中的三个数字表示百位，十位和个位的值，例如，706 等于 7 个百，0 个十和 6 个一。理解下列特殊情况：
    a. 100 可以视为一捆十个十——称为“百”。
    b. 数字 100，200，300，400，500，600，700，800，900 表示一，二，三，四，五，六，七，八或九个百（0 个十和 0 个一）。
2. 1000 以内的计数；以 5，10 和 100 进行跳过计数。
3. 使用十进位制数字，数名和扩展形式读写 1000 以内的数字。
4. 根据百位，十位和个位数字的含义比较两个三位数数字，使用 >，= 和 < 符号记录比较结果。

使用数位理解和运算律来进行加减法。

5. 熟练运用基于数位，运算律和/或加减法关系的策略进行 100 以内的加法和减法运算。
6. 运用基于数位和运算律的策略进行四个两位数的加法运算。
7. 使用具体模型或绘图以及基于数位，运算律和/或加减法关系的策略进行 1000 以内的加法和减法运算；将策略与书面方法相联系。理解在三位数的加法或减法运算中，百位与百位相加或相减，十位与十位相加或相减，个位与个位相加或相减；有时需要组成或分解十位或百位。
8. 进行心算，将 100 - 900 之间的给定数字加上 10 或 100，以及将 100 - 900 之间的给定数字减去 10 或 100。
9. 使用数位和运算律解释加法和减法策略的原理。[1]

[1] 可以利用绘图或物体来进行解释。

测量和数据 2.MD

测量和估计使用标准单位的长度。

1. 选择和使用尺子，码尺，米尺和卷尺等适当工具来测量物体的长度。
2. 重复测量一个物体的长度两次，两次测量分别使用不同长度的长度单位；描述两次测量值与所选单位的大小之间有何联系。
3. 使用英寸，英尺，厘米和米等单位来估计长度。
4. 测量并确定一个物体比另一个物体长多少，使用标准长度单位来表达长度差异。

将加法和减法与长度相联系。

5. 用 100 以内的加减法来解决涉及给定相同单位的长度的应用题，例如，使用绘图（如尺寸的绘图）和以符号表示未知数的等式来表示问题。
6. 在一个带有对应数字 0，1，2……的等距分布点的数轴图上用整数从 0 开始表示长度，并在数轴图上表示 100 以内的整数的和与差。

练习时间和货币。

7. 说出并写出模拟和数字时钟上最近的五分钟的时间，使用上午和下午表示。
8. 解决涉及美元钞票，两角五分钱辅币，一角银币，五分镍币和一分铜币的应用题，恰当地使用 $ 和 ¢ 货币符号。例如：如果你有 2 个一角银币和 3 个一分铜币，你总共有多少美分？

表示和解读数据。

9. 测量几个物体并使用最近的整数单位，或重复测量同一个物体，生成测量数据。通过画点线图来表示测量值，其横向刻度采用整数单位标记。
10. 画一个图片图和一个柱状图（带单一单位刻度）来表示最多四个类别的数据集。使用柱状图中显示的信息来解决简单的相加，相减和比较问题[1]。

[1] 见术语表，表 1。

几何 2.G

使用图形及其属性进行推理。

1. 认识并画出拥有具体属性的形状，如已知角度的数量或已知等边的数量。[1] 识别三角形，四边形，五边形，六边形和立方体。
2. 将长方形分割为由相同大小的正方形组成的行和列，并数出正方形的总数。
3. 将圆形和长方形分割为两等份，三等份或四等份，使用二分之一，三分之一，的一半，的三分之一等词语描述份额，并使用两个二分之一，三个三分之一，四个四分之一来描述整体。认识到相同整体的等份无需具有相同的形状。

[1] 尺寸是直接或视觉上进行比较的，不是通过测量进行比较。

数学 - 3 年级：导论

在 3 年级，教学时间应当专注于四个关键领域：（1）形成对 100 以内的乘法和除法以及乘法和除法策略的理解；（2）形成对分数的理解，尤其是单分数（分子为 1 的分数）；（3）形成对矩形阵列结构以及面积结构的理解；以及（4）描述并分析二维形状。

1. 学生通过涉及相同大小的组，阵列和面积模型的活动和问题，形成对整数乘法和除法的含义的理解；在这些情境中，乘法是指找出未知的乘积，而除法是指找出未知的因数。在同等大小的分组情境中，除法会要求找出组的未知数量或未知的组的大小。学生能够使用运算律计算整数的乘积，使用基于这些运算律的越来越复杂的策略，来解决涉及一位数因数的乘法和除法问题。通过比较不同的解题策略，学生会领悟到乘法与除法之间的关系。

2. 学生形成对分数的理解，从单分数开始。学生一般情况下可以将分数视为由单分数构成，他们能够使用分数以及可视化分数模型来表达一个整体的组成部分。学生能够理解分数部分的大小与整体的大小相关。例如，一小桶油漆的 1/2 可能小于一大桶油漆的 1/3，而一条丝带的 1/3 要长于同一条丝带的 1/5，因为这条丝带被分成 3 等份的时候，每一等份都要比被分成 5 等份的时候长。学生能够使用分数来表示一个数字等于，小于和大于另一个数字。他们能解决涉及使用可视化分数模型以及基于注意相同分子或分母的策略来比较分数的问题。

3. 学生能够认识到面积是二维区域的一个属性。他们可以通过找出在没有间隙或重叠的情况下覆盖形状所需的相同大小的面积单位的总数来测量一个形状的面积，用各边为单位长度的正方形作为测量面积的标准单位。学生理解矩形阵列可以分解为相同的行或相同的列。通过将长方形分解为正方形矩阵，学生能够从面积联想到乘法，并对使用乘法确定长方形面积进行证明。

4. 学生可以描述，分析和比较二维形状的属性。他们能够根据边和角来比较和归类形状，并将这些与形状的定义相联系。学生还能通过将一个形状的部分面积表示为一个整体的单分数，使他们的分数练习与几何相联系。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

3 年级纲要

运算与代数思维

- 表述并解决涉及乘法和除法的问题。
- 理解乘法的性质以及乘法和除法之间的关系。
- 进行 100 以内的乘法和除法运算。
- 解决涉及四则运算的问题，识别并解释算术模式。

十进制数字和运算

- 使用数位理解和运算性质来进行多位数算术。

数字和运算—分数

- 形成对分数作为数字的理解。

测量和数据

- 解决涉及测量和估计时间间隔，液体体积和物体质量的问题。
- 表示和解读数据。
- 几何测量：理解面积的概念，并把面积与乘法和加法相联系。
- 几何测量：认识周长这一平面图形的属性，区分线性测量和面积测量。

几何

- 使用图形及其属性进行推理。

运算与代数思维 3.OA

表述并解决涉及乘法和除法的问题。

1. 解释整数的乘积，例如，将 5 × 7 的乘积解释为每组 7 个物体的 5 组物体的物体总数。*例如，描述物体总数可以表达为 5 × 7 的情形。*
2. 解释整数的整数商，例如，将 56 ÷ 8 解释为将 56 个物体平均分为八份时每份的物体数量，或将 56 个物体分成含有 8 个物体的等份时等份的数量。*例如，描述等份的数量或组的数量可以表达为 56 ÷ 8 的情形。*
3. 使用 100 以内的乘法和除法来解决涉及相同的组，阵列和测量数量的应用题，例如，使用绘图和以符号表示未知数的等式来表示问题。[1]
4. 确定乘法或除法等式的三位整数中的未知整数。*例如，确定使以下每个等式正确的未知数：8 × ? = 48，5 = _ ÷ 3，6 × 6 = ?*

理解乘法的性质以及乘法和除法之间的关系。

5. 应用运算律作为乘法和除法的策略。[2] *例：如果已知 6 × 4 = 24，那么亦可知 4 × 6 = 24。（乘法交换律。）3 × 5 × 2 可以视为先进行 3 × 5 = 15 运算，然后进行 15 × 2 = 30 运算，或者先进行 5 × 2 = 10 运算，然后进行 3 × 10 = 30 运算。（乘法结合律。）已知 8 × 5 = 40 和 8 × 2 = 16，那么 8 × 7 可拆分为 8 × (5 + 2) = (8 × 5) + (8 × 2) = 40 + 16 = 56。（分配律。）*
6. 除法可理解为一个未知因数的问题。*例如，32 ÷ 8 可通过找出与 8 相乘的积等于 32 的数字进行求解。*

进行 100 以内的乘法和除法运算。

7. 使用乘法和除法之间的关系（例如，已知 8 × 5 = 40，即可知 40 ÷ 5 = 8）或运算律等策略，熟练进行 100 以内的乘法和除法运算。到 3 年级末，能够记忆所有两个一位数相乘的乘积。

解决涉及四则运算的问题，识别并解释算术模式。

8. 使用四则运算解决两步应用题。使用等式来表示这些问题，用字母代表未知数。使用心算和包括四舍五入在内的估计策略评估答案的合理性。[3]
9. 识别算术模式（包括加法口诀表和乘法口诀表中的模式），并运用运算律进行解释。*例如，观察 4 乘以任意一个数的乘积永远为偶数，并解释为什么 4 乘以任意一个数可拆分为两个相同的加数 。*

[1] 见术语表，表 2
[2] 学生们无需使用这些性质的正式术语。
[3] 该标准仅限于涉及整数以及具有整数答案的问题；学生应该知道如何在没有小括号表示特定顺序的情况下进行常规顺序的算术运算。

十进位制数字和运算 3.NBT

使用数位理解和运算律来进行多位数运算。[1]

1. 使用对数位的理解将整数四舍五入至最近的 10 或 100。
2. 熟练运用基于数位，运算律和/或加减法关系的策略和算法进行 1000 以内的加法和减法运算。
3. 使用基于数位和运算律的策略进行一位数整数与 10 - 90 之间的整十数的乘法运算（例如，9 × 80，5 × 60）。

[1] 可能会用到一系列算法。

数字和运算—分数[1] 3.NF

形成对分数作为数字的理解。

1. 将分数 1/*b* 理解为当一个整体被分为 *b* 等份时由 1 个等份形成的数量；将分数 *a*/*b* 理解为由多个 1/*b* 形成的数量。
2. 将分数理解为数轴上的一个数字；在数轴图上表示分数。
    a. 通过定义 0 至 1 之间的间隔为一个整体并将其分为 *b* 等份，在数轴图上表示分数 *1/b*。认识到每个等份的大小为 *1/b*，在数轴上起点为 0 的等份的终点便是数字 *1/b* 的位置。
    b. 通过在数轴图上从 0 开始标记长度 *1/b* 来表示分数 *a/b*。认识到最终间隔的大小为 *a*/*b*， 而其终点位于数轴上的数字 *a/b* 处。
3. 解释特殊情况下分数的等值，并通过推理比较分数的大小。
    a. 理解如果两个分数大小相同或在数轴上位于同一个点即为等值（相等）。
    b. 能够辨认和生成简单的等值分数（例如，1/2 = 2/4， 4/6 = 2/3）。解释为何这些分数是相等的，例如，通过使用一个视觉分数模型。
    c. 将整数表达为分数，并认出与整数相同的分数。 *例如：把 3 以 3=3/1 的形式表示；认出 6/1=6；把 4/4 和 1 在数轴图中相同点定位。*
    d. 通过推理他们的大小来比较分子相同或分母相同的两个分数的大小。 认识到只有在两个分数指的是相同整体时它们之间的比较才有效。用符号>，=，或者<记录比较结果，并论证结论，例如，通过使用一个视觉分数模型。

[1] 对于 3 年级学生这个领域仅限于分母为 2，3，4，6，8 的分数。

测量和数据 3.MD

解决涉及测量和估计时间间隔，液体体积和物体质量的问题。

1. 读写时间到最接近的分钟，并以分钟计算时间间隔。解决涉及以分钟计算的时间间隔的加减，例如，通过在数轴图上表示这个问题。
2. 使用标准单位克（g），千克（kg）和升（l）来测量和估计液体体积和物体质量。[1] 通过加，减，乘或除解决只需一步运算质量或体积单位相同应用题，例如，通过画图（例如带有刻度的量杯）来表示这个问题 [2]

表示和解读数据。

3. 画一个带刻度的图片图和一个带刻度的柱状图来表示多个类别的数据集。使用带刻度的柱状图中显示的信息来解决"多多少"和"少多少"的一步和两步应用题。 *例如，画一个柱状图，其中柱状图中每个正方形代表 5 只宠物。*
4. 使用标记有二分之一和四分之一英寸刻度的尺测量长度生成测量数据。通过画点线图来表示数据，其中用合适的单位标出横向刻度——整数，二分之一，或四分之一。

几何测量：理解面积的概念，并把面积与乘法和加法相联系。

5. 认识面积是平面图形的属性并理解面积测量的概念。
   a. 边长 1 单位的正方形叫做"单位正方形"，被称为有"一平方单位"的面积，可以用来测量面积。
   b. 一个可以用 n 个单位正方形覆盖且没有空隙或重叠的平面图形被称为有 n 平方单位的面积。
6. 通过数单位正方形（平方厘米，平方米，平方英寸，平方英尺和其他合适的单位）来计算面积。
7. 将面积与乘法和加法运算相关联。
   a. 通过拼图来计算边长为整数的长方形的面积，并显示这个面积和将边长相乘得出的结果相同。
   b. 在解决实际数学问题的情景下，将边长相乘计算边长为整数的矩形的面积，和在 数学推理中将整数乘积表示为矩形面积。
   c. 通过具体的拼图案例证明一个边长分别为整数 a 和 b+c 的长方形的面积等于 $a \times b$ 和 $a \times c$ *之和*。使用面积模型来表示数学推理的分配律。
   d. 认识面积的可加性。把直线图形分解成不重叠的正方形，然后将不重叠部分的面积相加得出直线图形面积，用这种技巧解决现实中的问题。

几何测量：认识周长这一平面图形的属性，区分线性测量和面积测量。

8. 解决涉及多边形周长的实际数学问题，包括已知边长计算周长，计算未知边长，以及展示周长相同但 面积不同的长方形或面积相同但周长不同的长方形。

[1] 诸如立方厘米之类的复合单位除外，和计算容器的几何容积。
[2] 乘法比较问题（涉及"倍数"概念的应用题；参见术语表，表 2）除外。

几何 3.G

使用图形及其属性进行推理。

1. 理解不同类别（例如，菱形，长方形和其他图形）的图形可能享有相同的属性（例如，有四条边），共享的属性可以定义一个更大的类别（例如，四边形）。认识 四边形的例子有菱形，长方形和正方形，并画不属于这些子类别的四边形例子。
2. 将图形分割成面积相等的部分。将各部分面积表示成整个的单分数。 *示例，将一个图形分成面积相等的 4 个部分，然后描述各个部分的面积等于图形面积的 1/4。*

数学 - 4 年级：导论

4 年级，教学时间应着重在三个关键地方：（1）发展对多位数乘法的理解和流利程度，和发展对除法的理解来计算涉及两位数被除数的商；（2）发展对分数等值，相同分母的分数的加减，分数与整数相乘的理解；（3）理解几何图形是可以根据其诸如平行边，垂直边，特定角度和对称的性质进行分析和分类。

1. 学生理解数位至 1,000,000，理解各个数位 数字的相对大小。在他们开发，讨论和使用有效，精确和一般方法计算多位数整数的乘积时，应用他们对乘法（同一数量级组，数组，面积模型）模型，数位和运算属性，特别是分配律的理解。根据不同的数字和场合，他们选择和精确地应用适当的方法来估计或心算乘积。他们通过有效的程序发展对整数乘法的流利程度；理解和解释根据数位和运算性质这些程序可用；使用他们来解决应用题。在他们开发，讨论和使用有效，精确和一般程序 计算多位数被除数的商时，学生应用他们对除法模型，数位，运算属性和除法和乘法的关系，特别是分配律的理解。根据场合，他们选择和精确地应用适当的方法来估计或心算商，并解读余数。

2. 学生发展对分数等值和分数运算的理解。他们认识到两个不同的分数可以相等（例如，15/9=5/3），他们发展生成和辨认相等分数的方法。学生扩展对分数是怎样由单位分数构成的理解，从单位分数构成分数，把分数分解成单位分数，和使用分数的概念和乘法的概念把分数和整数相乘。

3. 学生描述，分析，比较和分类二维图形。通过建造，绘画和分析二维图形，学生加深他们对二维物体属性的理解，并使用他们来解决涉及对称性的问题。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

4 年级概况

运算与代数思维
- 使用整数四则运算来解决问题。
- 熟悉因数和倍数。
- 生成和分析类型。

十进制数字和运算
- 概括对多位数整数的数位理解
- 使用数位理解和运算性质来进行多位数算术。

数字和运算—分数
- 扩展对分数等值和顺序的理解。
- 通过应用和扩展之前对整数运算的理解从单位分数构建分数。
- 理解分数的十进制表示法，并比较小数。

测量和数据
- 解决涉及计量和从大单位转化成小单位的计量转换的问题。
- 表示和解读数据。
- 几何测量：理解角度的概念和测量角度。

几何
- 绘画和识别线和角，并根据图形线和角的性质将图形分类。

运算和算术思考 4.OA

使用整数四则运算来解决问题。

1. 将乘法公式作为比较来解读，例如，将 35 = 5 × 7 解读成 35 等于 5 的 7 倍和 35 等于 7 的 5 倍。将乘法比较的书面陈述表示成乘法 等式。
2. 用乘法或除法来解决涉及乘法比较的应用题，例如，通过使用带有符号表示未知数字的绘图和等式来表示这个问题，把乘法比较和加法比较区分开。[1]
3. 使用四则运算解决涉及整数且结果为整数的多步应用题，包括余数必须被解读的问题。使用等式来表示这些问题，用字母代表未知数。使用心算和包括四舍五入的估计策略评估答案的合理性。

熟悉因数和倍数。

4. 找出 1-100 之间一个整数的所有因数组。认识到整数是其各因数的倍数。确定 1-100 之间给出的一个整数是否是一个一位 数的倍数。确定 1-100 之间给出的一个整数是否是质数或合数。

生成和分析类型。

5. 根据特定规则生成的一个数字类型或图形类型。识别在规则本身不明显但是类型中很明显的特征。示例，给定规则“加 3”，开始数字 1， 按顺序生成各项并观察各项在奇数和偶数交替出现。通俗地解释 *为什么数字会以这种形式继续交替出现。*

[1] 参见术语表, 表 2

十进制数字和运算[1] 4.NBT

概括对多位数整数的数位理解

1. 认识到一个多位数的整数，一个数字在一个位置代表了其在右边位置的十倍。*示例，通过应用数位和除法的概念认识到* $700 \div 70 = 10$ *。*
2. 使用十进制数字，数字命名和扩展形式读写多位数整数。根据各位置数字的意思比较 两个多位数数字，使用>, =, 和 <符号记录比较结果。
3. 使用对数位的理解来对多位数整数四舍五入至任何数位。

使用数位理解和运算性质来进行多位数算术。

4. 使用标准算法流利地进行多位数整数的加减。
5. 使用基于数位和运算性质的策略，将四位数整数与一位数整数相乘，和将两个两位数整数相乘。通过使用等式，矩阵列，和/或面积模型阐明和解释这个计算。
6. 使用基于数位，运算性质，和/或乘法和除法关系的策略，计算最大四位数被除数和一位数除数的整数商和余数。通过使用等式，矩阵列，和/或面积模型阐明和解释这个计算。

[1] 对于 4 年级学生这个领域仅限于小于或等于 1,000,000 的整数。

数字和运算—分数[1] 4.NF

扩展对分数等值和顺序的理解。

1. 通过使用视觉分数模型解释为什么分数 a/b *与另分数* $(n \times a)/(n \times b)$相等，注意到分数部分的数字和大小不一但是两个分数是一样大小的。 使用这个原则来辨别和生成相等的分数。
2. 比较分子不同和分母不同的两个分数的大小，例如，通过创造公分母或公分子，或者通过与诸如 1/2 的基准分数相比。认识到只有在两个分数指的是相同整体时比较才有效。用符号>，=，或者 <记录比较结果，并论证结论，例如，通过使用一个视觉分数模型。

通过应用和扩展之前对整数运算的理解从单位分数构建分数。

3. 理解分数 a/b，$a > 1$，是分数 1/b 的和。
    a. 理解分数的加减是通过合并或分开相同整体的部分。
    b. 以一种以上方式将一个分数分解成相同分母的分数之和，用等式记录每个分解。论证分解，例如，通过使用一个视觉分数模型。 *例如：3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8.*
    c. 加减公分母的混合数字，例如，通过把各混合数字替换成等值分数，和/或通过使用运算性质和加减关系。
    d. 解决涉及指相同整体和有相同分母的分数的加减的应用题，例如，通过使用视觉分数模型和等式来表示这个问题。
4. 应用和扩展之前在乘法的理解将分数和整数相乘。
    a. 理解分数 a/b 是 1/b 的倍数。*示例，使用视觉分数模型来表示 5/4 是 5 × (1/4)的乘积，通过等式 5/4 = 5 × (1/4)来记录结论。*
    b. 理解分数 a/b 的倍数是 1/b 的倍数，并使用这个理解将分数和整数相乘。*示例，使用视觉分数模型来表示 3 × (2/5) 等于 6 × (1/5)，认识到乘积是 6/5。(更一般地, n × (a/b) = (n × a)/b.)*

c. 解决涉及分数和整数相乘的应用题，例如，通过使用视觉分数模型和等式来表示这个问题。*示例，如果派对的每个人将吃 3/8 磅的烤牛肉，将会有 5 个人参加派对，需要多少磅的烤牛肉？你的答案在哪两个整数之间？*

理解分数的十进制表示法，并比较小数。

5. 将分母为 10 的分数表示为分母为 100 的相等分数，并使用这种技巧将分母分别为 10 和 100 的两个分数相加。[2] *例如，将 3/10 表示为 30/100，和加上 3/10 + 4/100 = 34/100。*
6. 使用十进制表示分母为 10 或 100 的分数。*例如，将 0.62 重写成 62/100；描述长度为 0.62 米；将 0.62 在数轴图中定位。*
7. 通过推理他们的大小来比较两个两位小数。 认识到只有在两个小数指的是相同整体时比较才有效。用符号>，=，或者<记录比较结果，并 论证结论，例如，通过使用一个视觉模型。

[1] 对于 4 年级学生这个领域仅限于分母为 2，3，4，5，6，8，10，12，100 的分数。
[2] 一般来说，能生成相等分数的学生可以发展不同分母分数相加的策略。但是在这个年级不需要进行不同分母分数的加减。

测量和数据 4.MD

解决涉及计量和从大单位转化成小单位的计量转换的问题。

1. 知道包括千米，米，厘米；千克，克；磅，盎司；升，毫升；时，分，秒同一单位系统中计量单位的相对大小。在同一计量系统中，将大单位计量以小单位表示。 在两列表格中记录计量等值。*示例，知道 1 英尺等于 1 英寸的 12 倍。 将长度为 4 英尺的蛇表示为 48 英寸。*生成英尺和英寸的转换表并列出数字对 *(1, 12), (2, 24), (3, 36), ...*
2. 使用四则运算来解决涉及距离，时间间隔，液体体积，物体质量和钱的应用题，包括涉及简单分数或小数的问题，以及需要 将大单位计量以小单位表示的问题。使用 诸如带有计量刻度的数轴图等图表表示计量数量。
3. 在实际数学问题中应用长方形面积和周长公式。*示例，已知地面面积和长度，通过查看面积公式含有未知因数的等式，计算长方形房间的宽度，*

表示和解读数据。

4. 画出点线图在上面表示单位分数（1/2, 1/4, 1/8）计量数据集。通过使用点线图中展示的信息解决涉及分数加减的问题。示例，从点线图中 计算和解读昆虫收集中最长和最短样本的长度差。

几何测量：理解角度的概念和测量角度。

5. 认识角是两条射线有一个共同的终点形成的几何图形，并 理解角度值得概念：
   a. 角的测量是以其两条射线的终点与参照的圆的圆心重合，通过计算角的两条射线与圆相交的两点之间圆弧的比例。跨越圆的 1/360 的角被称作“一度角”，可以用来计量角。
   b. 跨越 n 个一度角的角被称为 n 度的角。
6. 使用量角器测量整数度数的角。绘画特定度数的角。
7. 认识角度测量的可加性。当一个角被分解成不重叠的部分，整个角的角度测量是其部分的角度测量之和。解决加减应用题来计算 实际数学问题中图表上未知角，例如通过使用带有未知角度测量符号的等式。

几何 4.G

绘画和识别线和角，并根据图形线和角的性质将图形分类。

1. 绘画点，线，线段，射线，角（直角，锐角，钝角），和垂直线和平行线。识别二维图形。
2. 根据是否存在平行线和垂直线，或特定大小的角来分类二维图形。认识直角是一个类别，和识别直角。
3. 认识二维图形的对称轴是指穿过图形的一条线使得这个图形可以沿这条线被折叠成相配的部分。识别轴对称图形和画对称轴。

数学 - 5 年级：导论

5 年级，教学时间应当专注于三个关键领域：（1）发展分数加减法的流利程度，和发展对有限情况（单位分数被整数除和整数被单位分数除）分数乘法和分数除法的理解；（2）扩展除法至二位数除数，整合小数至数位系统和开发对两位小数的运算，和开发整数和小数运算的流利程度；和（3）发展对体积的理解。

1. 学生应用他们对分数和分数模型的理解来表示不同分母分数的加减为公分母的等效计算。他们发展分数求和和求差的流利程度，以及对分数进行合理的估计。学生还使用分数的意义，乘法和除法的意义，以及乘法和除法之间的关系来理解和解释为什么分数的乘法和除法的程序是合理的。（备注：这仅限于单位分数被整数除和整数被单位分数除的情况。）

2. 根据对十进制数字和运算性质的意义，学生发展对为什么除法程序有用。他们完成多位数加减乘除的流利程度。他们应用他们对小数模型，十进制计数法和运算性质的理解来加减两位小数。他们发展这些计算的流利程度，以及对他们结果进行合理的估计。学生使用小数和分数之间的关系，以及有限小数和整数之间的关系（例如，有限小数乘以 10 的适当次幂是整数）来理解和解释为什么有限小数的乘除是有意义的。他们有效精确地计算两位小数的乘积和商。

3. 学生认识体积是三维空间的一个属性。他们理解体积可以通过计算没有缝隙和重叠地填充空间需要的相同大小单位体积的总数量来计量。他们理解一个 1 单位乘 1 单位乘 1 单位的立方体是计量体积的标准单位。他们选择适当的单位，策略和工具来解决涉及估计和计量体积的应用题。他们分解三维图形和计算正矩形棱柱体的体积，通过将他们看成分解成一层层立方体阵列。他们计量图形的必要属性以便确定体积来解决实际数学问题。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

5 年级概况

运算与代数思维
- 书写和解读数字表达式。
- 分析类型和关系。

十进制数字和运算
- 理解数位系统。
- 进行多位数整数和两位小数的运算。

数字和运算—分数
- 使用等值分数的策略来加减分数。
- 应用和扩展之前在乘法和除法的理解来乘除分数。

测量和数据
- 在给定计量系统中换算相似计量单位。
- 表示和解读数据。
- 几何测量：理解体积的概念，并把体积与乘法和加法相联系。

几何
- 在坐标平面上画点来解决实际数学问题。
- 根据他们的属性将二维图形分类。

运算和算术思考 5.OA

书写和解读数字表达式。
1. 在数字表达式中使用小括号，中括号或大括号，和计算带这些符号的表达式。
2. 书写用数字记录计算的简单表达式，并解读数字表达式但不计算数值。*例如，将计算“8 加 7，然后乘以 2”表达成 2 × (8 + 7)*。认识 *3 × (18932 + 921) 是 18932 + 921 的三倍，无需计算表示的和或 乘积。*

分析类型和关系。

3. 使用两个给定规则生成两个数字类型。识别对应项的明显关系。形成由两个类型中的对应项组成的有序对，并在 坐标平面上画出有序对。例如，给定规则“加 3”和开始数字 0，和给定规则“加 6”和开始数字 0，按序列生成项，并观察一个序列的项是另外一个序列对应项的 两倍。*通俗地解释为什么是这样的。*

十进制数字和运算 5.NBT

理解数位系统。
1. 认识到一个多位数的数字，一个数字在一个位置代表了其在右边位置的十倍，代表了其左边位置的 1/10。
2. 解释一个数字乘以 10 的多次幂时乘积中零的数量的类型，以及解释一个小数被 10 的幂相乘或相除小数点位置的 类型。使用整数指数来记录 10 的幂。
3. 读写和比较三位小数。
   a. 使用十进制数字，数字命名，和扩展形式读写三位小数，例如 347.392 = 3 × 100 + 4 × 10 + 7 × 1 + 3 × (1/10) + 9 × (1/100) + 2 × (1/1000)。
   b. 根据各位置数字的意思比较两个三位小数，使用>, =, 和 < 符号记录比较结果。
4. 使用对数位的理解来对小数舍入至任何数位。

进行多位数整数和两位小数的运算。

5. 使用标准算法流利地进行多位数整数的乘法。
6. 使用基于数位，运算性质，和/或乘法和除法关系的策略，计算最大四位数被除数和两位数除数的整数商。通过使用等式，矩阵列，和/或面积模型阐明和解释这个计算。
7. 使用具体模型或绘图以及根据数位，运算性质，和/或加减之间关系的策略进行两位小数的加减乘除；将策略与书面方法相关并解释使用的推理。

数字和运算—分数 5.NF

使用等值分数的策略来加减分数。

1. 不同分母分数（包括混合数字）的加减，通过把给定分数替换成等值分数，使得与公分母分数的和差等效。 *示例， 2/3 + 5/4 = 8/12 + 15/12 = 23/12。(一般来说， a/b + c/d = (ad + bc)/bd.)*
2. 解决涉及指相同整体包括有不同分母情况的分数的加减的应用题，例如，通过使用视觉分数模型或等式来表示这个问题。使用基准分数和分数的数字意义来心算和评估答案的合理性。*示例，通过观察 3/7<1/2，认识 2/5+1/2=3/7 结果错误。*

应用和扩展之前在乘法和除法的理解来乘除分数。

3. 解读分数是分子被分母相除（$a/b = a \div b$）。解决涉及整数相除导致答案是分数或混合数字形式的应用题，例如，通过使用视觉 分数模型和等式来表示这个问题。示例，解读 3/4 是 3 被 4 除的结果， 注意到 3/4 乘以 4 等于 3，以及当 3 个整体被 4 个人平分后，每个人分到 3/4 大小。*如果 9 个人想要平分一带 50 磅的大米，每个人应该分到多少磅大米？你的答案在哪两个整数之间？*
4. 应用和扩展之前在乘法的理解将分数和整数或分数相乘。
    a. 解读$(a/b) \times q$ 的乘积是将 q 的部分分成 b 等分；等同地，是 $a \times q \div b$ 运算顺序的结果。*示例，使用视觉分数模型来表示(2/3) × 4 = 8/3，和为这个等式创建一个故事情景。(2/3) × (4/5) = 8/15 也类似处理。（一般来说， (a/b) × (c/d) = ac/bd。）*
    b. 通过用适当单位分数边上的单位正方形拼图来计算边长为分数的长方形的面积，并显示这个面积和将边长相乘得出的结果相同。将分数边长相乘来计算长方形面积，和表示分数乘积为长方形面积。
5. 解读乘法为缩放，通过：
    a. 根据另一个因数的大小，比较乘积和一个因数的大小，不进行表示的乘法。
    b. 解释为什么给定数字乘以大于 1 的分数结果是乘积大于这个给定数字（认识和乘以大于 1 的整数的情况类似）；解释 为什么给定数字乘以一个小于 1 的分数结果是乘积小于这个给定数字；并将分数等值 $a/b = (n \times a)/(n \times b)$的原则和 a/b *乘以 1 的效果相关联。*
6. 解决涉及分数或混合数字相乘的现实问题，例如，通过使用视觉分数模型和等式来表示这个问题。

7. 应用和扩展之前对除法的理解将单位分数被整数相除和整数被单位分数相除。[1]
    a. 解读单位分数被非零整数相除，和计算商。*示例，为(1/3) ÷ 4 创建一个故事情景，并使用视觉分数模型来表示商。*使用 乘法和除法的关系来解释*(1/3) ÷ 4 = 1/12* ，因为*(1/12) × 4 = 1/3*。
    b. 解读整数被单位分数相除，和计算商。*示例，为 4 ÷ (1/5) 创建一个故事情景，并使用视觉分数模型来表示商。使用乘法和除法的关系来解释 4 ÷ (1/5) = 20 ，因为 20 × (1/5) = 4。*
    c. 解决涉及单位分数被非零整数相除和整数被单位分数相除的现实问题，例如，通过使用视觉分数模型和等式来表示这个问题。*示例，如果 3 个人平分 1/2 磅的巧克力，每个人会分到多少巧克力？2 杯葡萄干中含有多少个 1/3 杯份？*

[1] 能够进行一般分数乘法的学生可以发展策略来做一般分数除法，通过推理乘法和除法的关系。但是在这个年级不要求分数和分数的除法。

测量和数据 5.MD

在给定计量系统中换算相似计量单位。

1. 在给定计量系统中换算不同大小标准计量单位（例如，把 5 厘米换算成 0.05 米），使用这些换算来解决多步现实问题。

表示和解读数据。

2. 画出点线图在上面表示单位分数（1/2, 1/4, 1/8）计量数据集。使用这个年级的 分数运算来解决涉及点线图上信息的应用题。*示例，给定相同量杯中含有不同计量的液体，计算如果所有量杯中总量平均分配，每个量杯中应含有的量。*

几何测量：理解体积的概念，并把体积与乘法和加法相联系。

3. 认识体积是立体图形的属性并理解体积测量的概念。
    a. 边长 1 单位的正方体叫做“单位正方体”，被称为有“一立方单位”的体积，可以用来测量体积。
    b. 一个可以用 n 个单位立方体覆盖且没有空隙或重叠的立体图形被称为有 n 立方单位的体积。
4. 通过数单位立方体使用立方厘米，立方英寸，立方英尺和适当单位计量体积。
5. 将体积与乘法和加法运算相关联，并解决涉及体积的实际数学问题。
    a. 通过装满单位立方体来计算边长为整数的正矩形棱柱体的体积，并显示这个体积和将边长相乘得出的结果相同，将底面面积乘以高度也相同。整数三次方乘积表示体积，例如， 来表示相关的乘法性质。
    b. 在解决实际数学问题中，应用公式 $V = l \times w \times h$ 和 $V = b \times h$ *来计算边长为整数的正矩形棱柱体体积。*
    c. 认识体积的可加性。通过不重叠部分体积之和计算由两个不重叠的正矩形棱柱体组成的立体图形的体积，将这种技巧应用解决现实中的问题。

几何 5.G

在坐标平面上画点来解决实际数学问题。

1. 使用一对垂直数字线，称为轴，来定义一个坐标系统， 使线（原点）的交点与每条线的 0 重合，通过使用一个数字有序的配对定位平面内的给定点，称为坐标。理解第一个数字表示从原点按一个轴的方向走的距离，第二个数字表示从原点按另一个轴的方向走的距离，两个轴的命名通常与坐标的命名相对应（例如，x 轴和 x 坐标，y 轴和 y 坐标）。
2. 通过在坐标平面的第一象限画点来表示实际数学问题，并解读在特定情况下坐标点的值。

根据他们的属性将二维图形分类。

3. 理解二维图形类别的子类别也拥有母类别的属性。示例，所有矩形有四个直角，正方形是矩形，所以所有正方形有四个 直角。
4. 根据属性按等级分类二维图形。

数学 - 6 年级：导论

6 年级，教学时间应当专注于四个关键领域：（1）将比率和比例和整数乘法和除法想联系并使用比率和比例的概念来解决问题；（2）完成分数除法的理解和扩展数字的概念到有理数系统，其中包括负数；（3）书写，解读和使用表达式和等式；和（4）发展对统计思考的理解。

1. 学生使用乘法和除法的推理来解决有关数量的比率和比例问题。通过把相等的比率和比例看作是乘法口诀表行（或列）对的衍生和扩展，并通过分析简单表示数量相对大小的图纸，学生把他们对乘法和除法的理解和比率和比例相关联。因此，学生扩展可以使用乘法和除法解决问题的问题范围，并他们把比率和分数相关联。学生解决涉及比率和比例的各种问题。

2. 学生使用分数的意义，乘法和除法的意义，以及乘法和除法之间的关系来理解和解释为什么分数的除法的程序是合理的。学生使用这些运算来解决问题。学生扩展他们之前对数字和数字顺序的理解到整个有理数系统，其中包括负有理数，和特别是负整数。他们推理有理数的顺序和绝对值，以及在坐标平面的四个象限中点的位置。

3. 学生理解在数学表达式中使用变量。他们书写给定情景相应的表达式和等式，计算表达式的值，和使用表达式和公式来解决问题。学生理解不同形式的表达式可以是相等的，他们使用运算性质重新书写等同形式的表达式。学生知道等式的解决方法是找到使得等式成立的变量值。学生使用运算性质和保持等式两边相等的概念来解决简单的一步等式。学生建立和分析表格，诸如相等比率的数量表，他们使用等式（诸如 $3x = y$）来描述数量之间的关系。

4. 巩固他们对数字理解的基础上，学生开始发展他们的统计思维能力。学生认识数据分布可能没有一个确定的中心，不同的方法计量中心会产生不同的数值。中位数计量中心是指中位数差不多是中间值。平均数计量中心是指如果所有数据数值的和重新平均分配，平均数是每个数据点能分到的数值，也是指平均数是一个平衡点。学生认识计量变化性（四分位差或平均绝对偏差）也可以用于概括数据，因为两个非常不同的数据集可以拥有相同的平均数和中位数，但是可以用它们的变化性加以区分。学生学习描述和概括数字数据集，识别聚类，峰值，间隔，和对称性，考虑到数据收集的情景。

6 年级学生还在小学学习的面积的基础上推理图形的关系来确定面积，表面积和体积。他们通过分解图形重新安排或移除部分并与矩形做比较，计算直角三角形，其他三角形和特殊四边形的面积。使用这些方法，学生讨论，发展和论证三角形和平行四边形的面积公式。通过分解成可以计算确定的面积，学生计算多边形的面积和棱柱和锥形的表面积。他们推理边长为分数的正矩形棱柱体来扩展边长为分数的正矩形棱柱体的体积公式。7 年级通过在坐标平面绘画多边形，他们准备比例图和几何图。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

6 年级概况

比率和比例关系

- 理解比率概念和使用比率推理来解决问题。

数字系统

- 应用和扩展之前在乘法和除法的理解来做分数除法。
- 流利计算多位数数字和找出公因子和公倍数。
- 应用和扩展之前对数字的理解到整个有理数系统。

表达式和等式

- 应用和扩展之前对算术的理解至算术表达式。• 推理和解决一元方程和不等式。
- 表示和分析自变量和因变量之间的量化关系。

几何

- 解决涉及面积，表面积以及体积的实际数学问题。

统计与概率

- 发展统计变化性的理解。
- 概括和描述分布。

比率和比例关系 6.RP

理解比率概念和使用比率推理来解决问题。

1. 理解比率的概念和使用比率语言来描述两个数量之间的比率关系。*示例，”动物园鸟屋中翅膀和喙的比率是 2:1，因为每 2 只翅膀就相对应 1 个喙。” ”候选人 A 得到一张票，候选人 C 将近得到三张票。“*
2. 理解单位比例 a/b 与比率 a:b，其中 b ≠ 0 相关的概念，和在比率关系情景下使用比例语言。*示例，”这个配方的比率是 3 杯面粉对 4 杯糖，因此每杯糖对应 3/4 杯的面粉。“”15 个汉堡我们支付了$75，也就是每个汉堡$5。”*[1]
3. 使用比率和比例推理来解决实际数学问题，例如通过推理相等比率表，带图，双数轴或等式。
   a. 画出数量和整数计量相关的同等比率表格，找出表格中缺失的数值，并在坐标平面上画出数值对。使用表格比较比率。
   b. 解决单位比例问题，包括涉及单位定价和恒定速度的问题。*示例，如果用了 7 个小时割了 4 个草坪，那么按照这个速率，35 个小时可以割多少个草坪?*割 l 草坪的速率是多少？
   c. 数量的百分比是指没 100 的比例（例如，30%的数量是指 30/100 乘以数量）； 解决涉及已知部分和百分比计算整体的问题。
   d. 使用比率推理来换算计量单位；在数量乘除时适当地操作和变换单位。

[1] 本年级单位比例的要求仅限于非复杂分数

数字系统　　6.NS

应用和扩展之前在乘法和除法的理解来做分数除法。

1. 解读和计算分数的商，和解决涉及分数和分数相除的应用题，例如，通过使用视觉分数模型和等式来表示这个问题。*示例，为 (2/3) ÷ (3/4) 创建一个故事情景，并使用视觉分数模型来表示商。使用乘法和除法的关系来解释(2/3) ÷ (3/4) = 8/9，因为 3/4 的 8/9 是 2/3。（一般来说，(a/b) ÷ (c/d) = ad/bc。）如果 3 个人平分 1/2 磅的巧克力，每个人会分到多少巧克力？2/3 杯的酸奶中含有多少份 3/4 杯？一块长度 3/4 英里和 1/2 平方英里的长方形土地其宽度是多少？*

流利计算多位数数字和找出公因子和公倍数。

2. 使用标准算法流利地进行多位数数字的除法。
3. 使用各个运算的标准算法流利地进行多位数小数的加减乘除。
4. 找出两个小于或等于 100 的整数的最大公约数，和两个小于或等于 12 的整数的最小公倍数 。使用分配律把两个 1-100 之间有公约数的整数的和表达成两个没有公约数的整数和的倍数。*示例，把 36 + 8 表达成 4 (9 + 2)。*

应用和扩展之前对数字的理解到整个有理数系统。

5. 理解一起使用正数和负数来描述相反方向 或数值（例如，温度高于/低于零，海拔高于/低于海平面，借/贷，正/负电荷）的数量；使用正数和负数来代表现实情况下的数量，解释各种情况下 0 的意义。
6. 理解有理数是数轴上的点。扩展低年级熟悉的数轴图和坐标轴来代表线上和平面上的负数坐标。
    a. 认识相反符号的数字是代表数轴上 0 的相反边的位置；认识数字的相反数的相反数是数字本身，例如，–(–3) = 3，以及 0 的相反数还是 0。
    b. 理解有序对数字的符号代表了坐标平面象限内的位置； 认识当两对有序对仅符号不同时，点的位置通过一个轴或两个轴的倒影相关联。
    c. 在横向或竖向数轴图上找出或定位整数和其他有理数；在坐标平面上找出和定位整数和其他有理数。
7. 理解有理数的顺序和绝对值。
    a. 解读不等式陈述为两个数值在数轴图上的相对位置的陈述。*例如，将 –3 > –7 解读为在一条方向从左到右的数轴上 –3 位于 –7 的右边的陈述。*
    b. 书写，解读，和解释现实情景下有理数的顺序陈述。*例如，书写 –3 ₒC > –7 ₒC 来表示 –3 ₒC 比 –7 ₒC 更温暖的事实。*
    c. 理解有理数的绝对值是指数轴上的点到 0 的距离；解读 绝对值是现实情景中正或负的数量的大小。*示例，账户余额 –30 美元，书写| –30| = 30 来描述负债的大小。*
    d. 把绝对值比较和有关顺序的陈述相区分。*示例，认识少于 –30 美元的账户余额代表了负债大于 30 美元。*
8. 通过在坐标平面的四个象限内画点来解决实际数学问题。包括使用坐标和绝对值来计算第一个坐标相同或 第二个坐标相同的点之间的距离。

表达式和方程 6.EE

应用和扩展之前对算术的理解至算术表达式。

1. 书写和计算涉及整数指数的数字表达式。
2. 书写，阅读，计算含有字母代表数字的表达式。
   a. 书写记录含有数字和代表数字的字母的运算表达式。*示例，将计算“从 5 减去 y”表达成 5 – y。*
   b. 识别使用数学术语（和，项，乘积，因数，商，系数）的表达式部分； 将表达式的一个或多个部分是为单个整体。示例，将表达式 *2 (8 + 7) 描述为两个因数的乘积；把 (8 + 7) 看作是单个整体以及两项之和。*
   c. 计算变量为特定数值时表达式的值。包括现实问题中使用公式产生的表达式。按常规次序，即在没有小括号表示特定顺序（运算顺序）时，进行算术运算，包括涉及整数指数的运算。*示例，使用公式 $V = s^3$ 和 $A = 6 s^2$ 来计算边长 $s = 1/2$ 的立方体的体积和表面积。*
3. 运用运算性质来生成等值表达式。*示例，应用分配律将表达式 3 (2 + x) 写成等值表达式 6 + 3x；应用分配律将表达式 24x + 18y 写成等值表达式 6 (4x + 3y)；应用运算性质将 y + y + y 写成等值表达式 3y。*
4. 识别两个表达式何时相等（例如，无论替代什么数值两个表达式指的是同一个数字）。*示例，表达式 y + y + y 和 3y 是相等的，因为不管代表什么数字他们指的是同一个数字。*

推理和解决一元方程和不等式。

5. 理解解决等式或不等式是回答一个问题的过程：特定集合中的那个数值，如果有，可以使等式或不等式成立？使用替代法来确定 特定集合中给定数字是否使等式或不等式成立。
6. 在解决现实或数学应用题时使用变量来代表数字和书写表达式；理解变量可以代表一个未知数，或者，根据实际目的，代表特定集合中的任何数字。
7. 通过书写和解决 *$x + p = q$ 和 $px = q$ 形式的方程，其中 p，q 和 x 都是非负有理数，用以*解决实际数学问题。
8. 书写 *$x > c$ 或 $x < c$ 形式的不等式来代表现实或数学应用题中的限制或条件*。认识 *$x > c$ 或 $x < c$ 形式的不等式有无限种解决方法；在数轴图上表示 这种不等式的解决方法。*

表示和分析自变量和因变量之间的量化关系。

9. 在现实问题中使用变量来表示两个相互改变的数量；书写方程来表示一个数量，看作是自变量，另外一个数量，看作是 因变量。使用 图表分析自变量和因变量之间的关系，并于方程相关联。示例，涉及匀速运动的问题，列出和画出距离和时间的有序对，并书写方程 d = 65t 来表示距离和时间之间的关系。

几何 6.G

解决涉及面积，表面积以及体积的实际数学问题。

1. 通过组成矩形 或分解成三角形或其他图形来计算直角三角形，其他三角形，特殊四边形和多边形的面积；在解决实际数学问题的情境中应用这些技巧。
2. 通过装满适当单位变成为分数的单位立方体来计算边长为分数的正矩形棱柱体的体积，并显示这个体积和将棱柱的边长相乘得出的结果相同。在解决实际数学问题中，应用公式 *$V = l\,w\,h$ 和 $V = b\,h$ 来计算边长为 分数的正矩形棱柱体体积。*
3. 给定顶点的坐标在坐标平面内绘画多边形；使用坐标来计算相同第一坐标或相同第二坐标的点相互连接成边的长度。在解决实际数学问题的情境中应用这些技巧。
4. 使用矩形和三角形组成的网来表示三维图形，并使用网来计算这些图形的表面积。在解决实际数学问题的情境中应用这些技巧。

发展统计变化性的理解。

1. 认识统计学问题是期待与问题相关数据的变化性以及在答案考虑变化性的问题。示例，“我多大了？”不是一个统计学问题，但是“ 我学校的学生多大？”是一个统计学问题，因为学生的年龄具有变化性。
2. 理解用于回答统计学问题收集的数据集其分布可以通过其中心，范围和整体形状来描述。
3. 认识数值型数据集的中心衡量用一个数字概括了所有的数值，而变异量数用一个数字描述了数值的变化。

概括和描述分布。

4. 在数轴上标出数值型数据，包括点状图，直方图和盒形图。
5. 概括各种情景下数值型数据，例如通过：
    a. 报告观察的数量。
    b. 描述被调查属性的性质，包括怎样计量和其计量单位。
    c. 考虑数据收集的情景，给出量化中心衡量（中位数和/或平均数）和变化性（四分位差和/或平均绝对偏差），以及描述所有整体类型和所有 整体类型中明显的偏差。
    d. 中心衡量和变化性的选择与数据分布和数据收集的情景相关。

数学 - 7 年级：导论

7 年级，教学时间应当专注于四个关键领域：（1）发展对比例关系的理解和应用；（2）发展对有理数运算的理解以及学习表达式和线性方程；（3）解决涉及缩放图和非正式的几何绘图的问题，以及学习二维和三维图形来解决涉及面积，表面积和体积的问题；和（4）根据样本对人口做出推断。

1. 学生扩展他们对比率的理解和发展对比例性的理解来解决一步和多步应用题。学生使用它们对比率和比例性的理解来解决各种百分比问题，包括涉及贴现，利息，税收，小费和百分比增加或减少的问题。学生通过比较物体对应长度或通过使用相识物体长度关系保持一致的事实来解决关于缩放图的问题。学生画出比例性的关系并理解单位比例是计量相关线条的坡度，称为斜率。他们将比例性的关系与其他关系相区分。

2. 学生发展对数字的统一理解，认识分数，小数（有限小数或循环小数），和百分比是分数数字的不同表示。学生扩展加减乘除至所有有理数，维持运算性质和加减乘除的关系。通过应用这些性质，和在日常情景中（例如，欠款或零度以下温度）观察负数，学生解释和解读负数加减乘除的规则。他们使用有理数的算术来构建一元表达式和等式，并使用这些方程来解决问题。

3. 学生继续学习 6 年级的面积，解决涉及圆面积和周长以及三维物体表面积的问题。为准备 8 年级学习的一致性和相似性，他们使用缩放图和几何绘图推理二维图形的关系，他们增加相交线形成的角度的熟悉程度。学生 学习三维图形，通过观察横截面来与二维图形相关联。他们 解决涉及由三角形，四边形，多边形，立方体以及直棱柱组成二维和三维物体的面积，表面积和体积的现实和数学的应用题。

4. 学生在之前学习的单个数据分布的基础上比较两个数据分布并解决人口差异的有关问题。他们开始学习随机取样来生成数据集并学习代表样本对得出推论的重要性。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

7 年级概况

比率和比例关系

- 分析比例性的关系并使用它们来解决实际数学问题。

数字系统

- 应用和扩展之前对分数运算的理解来加减乘除有理数。

表达式和等式

- 使用运算性质来生成等值表达式。
- 使用数值和算术表达式和等式解决实际数学问题。

几何

- 作图，并描述几何图形，同时描述他们之间的关系。
- 解决涉及角度测量，面积，表面积以及体积的实际数学问题。

统计与概率

- 使用随机抽样得出关于人群的推论。
- 就两个人群得出非正式的比较性推断。
- 调查研究随机过程，并制定，使用以及评价概率模型。

比率和比例关系 7.RP

分析比例性的关系并使用它们来解决实际数学问题。

1. 计算与包括长度比率，面积比率和其他相同或不同单位计量的数量比率等分数比率有关的单位比例。*示例，如果一个人每 1/4 小时行走 1/2 英里，计算单位速率为复杂分数 1/2/1/4 英里每小时，等同于 2 英里每小时。*
2. 认识和表示数量之间的比例性关系。
   a. 决定两个数量是否存在比例性关系，例如，通过以表格测试等值比率或在坐标平面上画图并观察图形是否是一条通过 原点的直线。
   b. 识别表格，图形，方程，图表以及语言描述的比例性关系中比例性（单位比例）常量。
   c. 通过方程表示比例性关系。*示例，如果总成本 t 与以固定价格 p 购买的 n 件物品是比例性的，总成本和物品数量的关系可以表达成 $t = pn$。*
   d. 根据情景解释比例性关系图像上的一点 (x, y) 的含义，需 特别注意点$(0, 0)$ 和 $(1, r)$，其中 r 是单位比例。
3. 使用比例性关系解决多步比率和百分比问题。例如：简单利息，税收，升价和降价，报酬和佣金，费用，百分比增加和减少，百分比错误。

数字系统 7.NS

应用和扩展之前对分数运算的理解来加减乘除有理数。

1. 应用和扩展之前对加减的理解来加减有理数； 在横向或竖向数轴图上表示加减。
   a. 解释相反数量合并等于 0 的情景。*示例，一个氢原子有 0 电荷，因为其两个成分带相反的电荷。*

b. 理解 $p + q$ *是指离 p 在正或反方向，取决于 q 是正数还是负数，距离*$|q|$的数字。显示一个数字和其相反数之和为 0（加法逆元）。通过描述现实情景来解读有理数之和。

c. 理解有理数的减法是加上加法逆元，$p - q = p + (-q)$。显示数轴上两个有理数的距离是他们之差的绝对值，并在现实情景中应用这个原则。

d. 应用运算性质的策略来加减有理数。

2. 应用和扩展之前在乘除法和分数的理解来乘除有理数。

   a. 理解通过要求运算继续符合运算法则，特别是分配律，导致诸如$(-1)(-1) = 1$ 乘积 和带符号数字的乘法规则，乘法从分数扩展至有理数。通过描述现实情景来解读有理数 的乘积。

   b. 理解整数是可以被除的，只要除数不是零，每个整数商（非零除数）都是有理数。*如果 p 和 q 是整数，那么* $-(p/q) = (-p)/q = p/(-q)$。通过描述现实情景来解读有理数的商。

   c. 应用运算性质的策略来乘除有理数。

   d. 使用长除法将有理数转换成小数；知道有理数的小数形式以 0 结尾或最终重复。

3. 解决涉及有理数四则运算的实际数学问题。[1]

[1] 有理数的计算将操作分数的规则扩展至复杂分数。

表达式和方程 7.EE

使用运算性质来生成等值表达式。

1. 应用运算性质的策略用有理系数来加，减，分解因子，和展开线性表达式。
2. 理解在应用题情景下以不同形式重新书写表达式可以清楚明白这个问题以及其中的数量是怎样相关联的。示例，*$a + 0.05a = 1.05a$ 意思是"增加了 5%"和 "乘以 1.05 "是一样的*

使用数值和算术表达式和等式解决实际数学问题。

3. 有策略性地使用工具解决多步带有各种 形式（整数，分数，和小数）的正负有理数的实际数学问题。应用运算性质来做任何形式数字的计算；适当地转换不同的形式；和使用心算和估计策略评估答案的合理性。*示例：如果时薪为 25 美元的妇女涨薪 10%，她一小时将多挣其时薪的 1/10，或者 2.50 美元，新工资为 27.50 美元。如果您想要在门中央安置一个长 9 3/4 英寸的毛巾杆，门的宽度为 27 1/2 英寸，毛巾杆的安置将需要距每个门边约为 9 英寸；这种估算可用于检验精确计算。*
4. 使用变量代表实际或数学问题中的数量，并构造简单的方程和不等式，以通过推断这些数量来解决问题。

   a. 解应用题，产生形式 $px + q = r$ 和 $p(x + q) = r$ 的方程，其中 p, q 以及 r 均为具体的有理数。熟练求解这些形式的方程。将代数解与 数值解相比，确定每种方法所用运算的顺序。*例如，矩形的周长是 54 厘米。其长度是 6 厘米。其宽度是多少？*

   b. 解决应用题，产生形式为 $px + q > r$ 或 $px + q < r$ 的不等式，其中 p, q 以及 r 均为特定有理数。图示该不等式的解集，并在该问题的环境中进行解读。*示例：作为一名销售员，您的报酬是 每周 50 美元外加每笔交易 3 美元的佣金。您希望自己本周的工资至少为 100 美元。写出您需要达成交易笔数的不等式，并描述其解。*

几何 7.G

作图，并描述几何图形，同时描述他们之间的关系。

1. 解决涉及几何图形缩尺图的问题，包括根据缩尺图计算实际长度和面积，并以一个不同比例复制缩尺图。
2. 按照给定的条件画（自由手，用尺子和量角器，还有技术）几何形状。专注 于根据三个角或边的测量值绘制三角形，注意到何时所给条件确定一个独特的三角形，或者无法确定三角形。
3. 画出因切割立体图形所形成的平面图形，例如直四棱柱和直四棱锥的截面。

解决涉及角度测量，面积，表面积以及体积的实际数学问题。

4. 了解圆的面积和周长公式，并将其用于解决问题；非正式地推导出圆的周长和面积之间的关系。
5. 在多步骤的问题中，使用关于互补角，互余角，对顶角和邻角的事实，写出图形中某个未知角的简单方式，并求解。
6. 解决实际数学问题，例如二维和三 维物体的面积，体积和表面积；这些物体由三角形，四边形，多边形，立方体以及直棱柱组成。

统计与概率 7.SP

使用随机抽样得出关于人群的推论。

1. 理解统计可用于通过检查人群的样本获得关于该人群的信息；只有样本能代表 人群时，关于该人群的样本归纳才是有效的。了解随机抽样倾向于产生代表性样本并支持有效推论。
2. 使用来自随机样本的数据就感兴趣的人群未知重要特征作出推断。生成大小相同的多重样本（或模拟样本）判定估算或预测方面的变异。*例如，通过从书本中随机抽取单词来估计平均单词长度；根据随机抽样的调查数据预测学校选举的获胜者。判定估计或预测可能差多远。*

就两个人群得出非正式的比较性推断。

3. 非正式评估两种数值性数据分布的视觉重叠程度， 通过将其表达为多重量度变化性来测定中心之间的差异。*示例：篮球队队员的平均身高比足球队队员的平均身高要高 10 厘米，大约是无论哪一队变化性（平均绝对偏差）的两倍；在点阵图上，两对身高分布之间的分离度是显著的。*
4. 使用中心量度和变化性量度就两个人群得出非正式的比较性推断。*示例：决定七年级科学书籍的章节单词数通常是否长于四年级科学书本的章节单词数。*

调查研究随机过程，并制定，使用以及评价概率模型。

5. 理解偶然事件的概率是一个介于 0 和 1 之间的一个数字，其中 0 和 1 表示事件发生可能性。数字越大，表示可能性越大。接近 0 的概率，表示某种事件不可能， 约为 1/2 的概率，表示一件事既可能也不可能，而接近 1 的概率，表示某种 事件可能。
6. 近似估算随机事件概率的方法：收集关于产生随机事件的随机过程的数据，观察其长期相对频率，并根据概率预测近似相对频率。*示例：当滚动数字立方体 600 次时，预测 3 或 6 将被滚动 200 次，但很可能并不确切是 200 次。*
7. 制定一个概率模型，并将其用于发现事件的概率。将来自模型的概率与所观察的频率进行比较；如果一致性不好，解释差异的可能来源。
    a. 通过给所有结果分配相等的概率来制定一个均匀概率模型，并使用该模型确定事件概率。*示例：如果从一个班上随机选择一名学生，求简将被选中的概率及一名女孩将被选中的概率。*
    b. 在由随机过程生成的数据中观察频率，从而制定概率模型（这可能不是均匀的）。*示例：求得旋转硬币将会头像面向上落地或上掷纸杯将会杯口向下落地的近似概率。根据观察的频率旋转硬币的结果似乎同等吗？*
8. 使用有序列表，表格，树形图以及模拟发现复合事件的概率。
    a. 了解到正如简单事件一样，复合事件的概率是复合事件发生所在同一空间内结果的分数。
    b. 使用诸如有序列表，表格和树形图之类的方法表示复合事件的样本空间。对于用日常语言描述的一起事件（例如 “滚双六”），确定复合该事件的同一空间中的结果 。
    c. 设计和使用模拟生成复合事件的频率。*示例：使用随机数字作为模拟工具近似计算该问题的答案：如果 40%的供体为 A 型血，那么 4 个供体中至少有一个 A 型血的概率将会是多少？*

数学 - 8 年级：导论

在 8 年级中，教学时间应当专注于三个关键领域：(1) 制定和推理表达式和方程，包括建立二元数据关联的线性方程模型，并求解线性方程和线性方程组；(2) 掌握函数概念和使用函数描述定量关系；(3) 使用距离，角度，相似性以及同余式分析二维和三维空间和图形，并理解和运用毕达哥拉斯定理。

1. 学生们使用线性方程和线性方程组描述，分析以及解决种种问题。学生们认为比例方程（$y/x = m$ 或 $y = mx$）是特殊的线性方程（$y = mx + b$），理解比例常数(m)是斜率，而图形则是通过原点的直线。他们认为，直线的斜率 (m) 是恒定的变化率，因此如果输入或 x 坐标变化的数量为 A，则输出或 y 坐标变化的数量为 $m \cdot A$。学生们还使用线性方程描述二元数据中两个数量之间的关联（例如同班学生的臂长与身高）。在这个年级，拟合模型以及评估其数据拟合，都是非正式进行的。在该数据的环境中解读该模型，需要学生们表达两个所讨论数量之间的关系，并根据这种情境解读关系的分量（例如斜率和 y 轴截距）。

1. 学生们策略性地选择并高效率地实施程序，以对一元线性方程求解，理解他们何时使用等式的性质和逻辑对等的概念，他们保持原方程的解。学生们对两个联立二元线性方程求解，并将该方程组与平面中的成对直线相关联；这些交叉都是平行的或者是同一条线。学生们使用线性方程，线性方程组，线性函数及其对直线斜率的理解来分析情境并解决问题。

2. 学生们将函数的这个概念掌握为一条规则：给每项输入确切地分配一项输出。他们理解，函数描述一个数量确定另一个数量的情境。他们能够在函数的表示形式和局部表示形式当中转换（注意：表格和图形表示形式可能都是局部表示形式），而且他们描述函数的诸方面都用不同的表示形式进行反映。

3. 学生们使用关于距离和角度及其在转换，旋转，映射以及扩张状态下如何表现的思想，以及关于全等及相似性的思想来描述和分析二维图形，并解决问题。学生们证明，三角形中各角的和就是一条直线所形成的角，而且由于当截线与平行线相交时形成的角，直线的各种布局形成相似三角形。学生们理解毕达哥拉斯定理及其逆定理的陈述，而且比方说能够解释为什么毕达哥拉斯定理支持用两种不同的方式分解平方数。他们运用毕达哥拉斯定理求得坐标平面上点之间的距离，求得长度，以及分析多边形。学生们通过解决涉及锥体，圆柱体以及球体的问题来完成其关于体积的作业。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

8 年级概述

数字系统
- 了解有些数不是有理数，并通过有理数对它们进行近似求解。

表达式和等式
- 处理根式与整数指数。
- 理解比例性关系，直线以及线性方程之间的联系。
- 分析和解决线性方程及联立线性方程组。

函数
- 定义，评价以及比较函数。
- 使用函数建立数量之间的关系模型。

几何
- 使用物理模型，幻灯片，或几何软件理解同余式和相似性。
- 理解并运用毕达哥拉斯定理。
- 解决涉及圆柱体，椎体和球体体积的实际数学问题。

统计与概率
- 调查研究二元数据的关联模式。

数系 8.NS

了解有些数不是有理数，并通过有理数对它们进行近似求解。

1. 了解有些数不是有理数，称为无理数。非正式理解每个数都有一个 小数展式；对于有理数，表明小数展式实际上重复，而且可将实际上重复的小数展式转换成有理数。
2. 使用无理数的有理近似法来比较无理数的大小，在数线图上找到它们的近似位置，并估计表达式的值（例如，π^2）。*示例：通过 将小数展式舌项 √2，证明 √2 是介于 1 和 2 之间，然后介于 1.4 和 1.5 之间，再解释如何 继续进行，以得到更好的近似值。*

表达式和方程 8.EE

处理根式与整数指数。

1. 了解并运用整数指数的特性，以生成等值数值表达式。示例：$3^2 \times 3^{-5} = 3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$。
2. 使用平方根和立方根符号来表示方程算式 $x^2 = p$ 和 $x^3 = p$ 的解，其中 p 是一个正有理数。评价小完全平方数的平方根和小完全立方数的立方根。了解 √2 是无理数。
3. 若数的表达形式为单位数乘以 10 的整数次幂，将该数用于估计非常大或 非常小的数量，并用于表达一个数量同样比另一个数量大多少倍。*示例：将美国人口数估计为 3 乘以 10^8，将世界人口数估计为 7 乘以 10^9，那么可确定世界人口数要大 20 多倍。*
4. 用以科学记数法表达的数执行运算，包括其中同时使用十进制和科学记数法的问题。使用科学记数法并为非常大或非常小的数量选择适当大小的计量单位（例如为海底扩张使用每年毫米数）。解读科学技术已经生成的科学记数法。

理解比例性关系，直线以及线性方程之间的联系。

5. 图解比例关系，将单位比率解读为图形的斜率。比较两个用不同方式表达的不同 比例关系。示例：将一个距离-时间图形与距离-时间方程比较，确定两个移动物体中哪个有更大的速度。
6. 使用相似三角形解释为什么在坐标平面内一条非垂直直线上任两个截然不同点之间的斜率 m 都是相同的；求得过原点直线的方程为 y = mx 和垂直轴上截距为 b 的直线的方程为 $y = mx + b$ 。

分析和解决线性方程及联立线性方程组。

7. 解一元线性方程。
   a. 例举有一解，无穷多解，或无解的一元线性方程。证明这些可能性中哪种是这种情况：通过连续地将给定方程转换 成更简单的形式，直至算式 $x = a$, $a = a$, 或 $a = b$ 的等价方程产生（其中 a 和 b 是 不同的数）。
   b. 解含有理数系数的线性方程，包括其解需要使用分配律扩展表达式并收集同类项的方程。
8. 分析并解联立线性方程组。
   a. 理解两个联立线性二元方程的解与其图形的交叉点对应，因为交叉点同时满足两个方程。
   b. 用代数法解两个联立线性二元方程，并通过图解方称来估计它们的解。解一次线性方程组并验算。*示例：$3x + 2y = 5$ 和 $3x + 2y = 6$ 没有解， 因为 $3x + 2y$ 不能同时等于 5 和 6。*
   c. 解实际数学问题，产生两个线性二元方程。*示例：根据两对点的坐标，确定穿过第一队点的直线是否与穿过第二对点的直线相交。*

函数 8.F

定义，评价以及比较函数。

1. 理解函数是一条规则：给每项输入确切地分配一项输出。函数的图形是序对集；序对由一项输入及其对应的输出组成。[1]
2. 比较两个函数的性质，每个函数以不同的方式进行表述（代数上，图形上，数字上 ，用表格，或通过语言描述）。*示例：鉴于通过数值表表达的线性函数和通过代数表达式表达的线性函数，确定哪个函数有更大的变化率。*
3. 将方程 $y = mx + b$ 解读为定义一个线性函数，该函数的图形是一条直线；例举非线性函数。*示例：函数 $A = s^2$ 给出正方形的面积为其边长的函数，是非线性性的，因为其图形包含点 (1,1)，(2,4) 和 (3,9)，它们都不在一条直线上。*

使用函数建立数量之间的关系模型。

4. 构建一个函数，以模拟两个数量之间的线性关系。从对一种关系的描述或者从两个(x, y)值，包括从一幅表格或从一幅图形读取这些值，确定函数的变化比率和初始值。 根据线性函数模拟的情境，以及根据其图形或数值表，解读该函数的变化比率和初始值。
5. 通过分析图形来定性描述两个数量之间的函数关系（例如，其中 函数是递增或递减性的，或者是线性或非线性的）。绘制一幅草图，展示一个函数的定性特征；该函数已经进行过语言描述。

[1] 函数记数法在 8 年级期间是不需要的。

几何 8.G

使用物理模型，幻灯片，或几何软件理解同余式和相似性。

1. 实验验证旋转，映射以及转换的性质：
    a. 直线归于直线，而线段归于同长的线段。
    b. 角则归于同样量度的角。
    c. 平行线归于平行线。
2. 理解一个二维图形与另一个一致，设若第二个二维图形可以通过一系列旋转，映射以及转换从第一个二维图形取得；鉴于两个一致的图形，描述一种展示 它们之间一致性的序列。
3. 使用坐标描述扩张，转换，旋转以及映射对二维图形的影响。
4. 理解一个二维图形与另一个相似，设若第二个二维图形可以通过一系列旋转，映射，转换以及扩张从第一个二维图形取得；鉴于两个相似的二维图形，描述一种展示 它们之间相似性的 序列。
5. 使用非正式论证建立关于三角形角度和和外角的事实，关于平行线被截线相切时所成角度的事实，并使用两对应角相等定则判定三角形相似性。*示例：排列同一三角形的三个副本，以便三个角的和似乎形成一条直线，并根据截线论证为什么这样。*

理解并运用毕达哥拉斯定理。

6. 解释证明毕达哥拉斯定理及其逆定理。
7. 在二维和三维的实际数学问题中，运用毕达哥拉斯定理确定正三角形的未知边长。
8. 运用毕达哥拉斯定理发现坐标系中两个点之间的距离。

解决涉及圆柱体，椎体和球体体积的实际数学问题。

9. 了解锥体，圆柱体以及球体的体积公式，并使用它们解决实际数学问题。

统计与概率 8.SP

调查研究二元数据的关联模式。

1. 构建并解读二元测量数据的散点图，以研究两个数量之间的关联模式。描述诸种模式，例如聚集，异常值，正相关或负相关，线性相关以及 非线性相关。
2. 了解直线被广泛用于模拟两个定量变量之间的关系。对于显示线性相关的散点图，非正式地拟合一条直线，并通过判定数据点对该直线的接近度来非正式地评估该模型。
3. 在二元测量数据的环境中使用线性模型的方程解问题，解读斜率和截距。*示例：在一个生物实验的线性模型中，将斜率 1.5 厘米/小时解读为意味着：每天增加一小时的日照与成熟植株高度增加 1.5 厘米相关联。*
4. 理解通过在双向表中显示频率和相对频率，就可以在二元分类数据中看到关联模式。构建并解读双向表，总结与从相同对象采集的两个分类变量相关的数据。使用针对行或列计算的相对频率描述两个变量之间的可能关联。*示例：从您所在班级的学生中就他们是否有学校夜晚宵禁令及他们是否曾分配有家务进行数据采集。是否有证据证明那些有宵禁令的人往往还有做家务？*

高中数学标准

高中标准具体说明所有学生都应该学习以便为大学和职场做好准备的数学。为便于接受高级课程，例如微积分，高等统计学，或者离散数学，学生们须学会标记有 (+)的其它数学，详见如下：

(+) 在复数平面上以矩形和极坐标的形式描述复数（包括实数和虚数 ）。

未标 (+) 号的所有标准，将存在于所有大学和就业就绪学生的所有普通数学课程中。有 (+) 号的标准，可能还出现在为所有学生准备的课程中。

高中标准按概念范畴进行罗列：

- 数字和数量
- 代数
- 函数
- 建模
- 几何
- 统计与概率

概念范畴条理明了地描绘高中数学；例如，学生的函数学习，交叠许多传统课程界限，可能直至并包括微积分。

建模的最佳解读不是孤立主题的集合而是与其它标准相关主题的集合。建立数学模型是一种标准数学实践，而特定建模标准出现在整个标有星号(*)的高中标准当中。这个星号有时出现在一组标准的标题上；在那种情况下，就应该理解为将适用于那一组的所有标准。

数学 - 高中数和数量：导论

数和数系。

在从幼儿园到八年级的岁月里，学生们都必须反复地扩展数的概念。首先，“数”意思是“可数数”：1, 2, 3......，紧接着 0 被用于代表“没有”，而整 数包括可数数和零。下一个扩展是分数。首先，分数几乎不能算数，且与图像表征强烈关联。然而到学生们理解 分数除法的时候，他们有分数作为数的强烈概念，而且经由它们的十进制 表示形式将它们与用于代表整数的十进位制联系在一起。在中学期间，分数扩展到负分数，形成有理数。在 8 年级期间，学生们再次扩展这个系统，有理数扩展到无理数，形成实数。在高中，学生们还将接触数的另一个扩展，此时实数扩充了虚数，形成复数。

借助数的扩展，扩展了加法，减法，乘法以及除法的意义。在每一个新数系中——整数，有理数，实数以及复数——四则运算在两个重要方面保持不变：它们都有交换律，结合律以及分配律，而且他们的新意义符合其以前的意义。

扩展整数指数的性质，产生新而且富有成效的记数法。示例：整数指数的性质表明，(51/3)3 应为 5(1/3)3 = 51 = 5，表明 51/3 将是 5 的立方根。

计算器，试算表以及计算机代数系统，都可以提供方法，让学生们更好地熟悉这些数系及其符号的。可以使用它们生成数值试验的数据，帮助理解矩阵，矢量以及复数代数的运算，以及试用非整数指数。

数量。

在现实世界的问题中，答案通常不是数而是数量：带单位的数，牵涉到计量。在直至 8 年级的计量作业中，学生们主要量度常用 属性，例如长度，面积以及体积。在高中，学生们在建模方面遇到种类更多的单位，例如加速，货币兑换；导出量，例如工时和采暖度日数；社会 科学比率，例如人均收入，以及日常生活比率，例如每场比赛得分或击球 平均得分数。他们还遇到新颖的情境，其中他们自己必须构想感兴趣的属性。示例：要找到高速公路整体安全性的良好量度，他们可以提出量度，例如每年死亡事故，每年每个司机死亡事故，或每辆车每英里行程死亡事故。这样的概念性过程可以称为量化。对科学而言，量化很重要，因为此时表面积突然 “突出”为重要的蒸发变量。对企业而言，量化也很重要，必须概念化相关属性并为其创建或选择适当的量度。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

数字和数量概述

实数系
- 将指数的性质扩展到有理指数
- 使用有理数和无理数的性质。

数量
- 定量推理和使用单位解决问题

复数系
- 用复数执行算术运算
- 在复数平面上展现复数及其运算
- 在多项式恒等式和方程中使用复数

向量和矩阵数量
- 用向量代表和模拟。
- 执行向量运算。
- 执行矩阵运算并将其运用于应用实例中。

实数系 N-RN

将指数的性质扩展到有理指数。

1. 解释如何通过将整数指数性质扩展到那些数值，根据有理指数除去根式符号来推断有理指数的意义定义。*示例：我们定义* $5^{1/3}$ *为 5 的立方根，因为我们需要保持*$(5^{1/3})^3 = 5^{(1/3)3}$*，因此* $(5^{1/3})^3$ *必须等于 5。*
2. 使用指数的性质改写表达式，包括根数和有理指数。

使用有理数和无理数的性质。

3. 解释为什么两个有理数的和或乘积是有理数；为什么一个有理数和一个无理数的和是无理数；为什么一个非零有理数和一个无理数的乘积是 无理数。

数量 N-Q

定量推理和使用单位解决问题。

1. 将单位用作理解问题和解多步骤问题的的方式；在公式中一致地选择和解读单位；在图形和数据显示中选择标度和原点并解读。
2. 为描述建模目的定义适当的数量。
3. 选择报告数量时适合测量限制的准确度水平。

复数系 N-CN

用复数执行算术运算。

1. 了解有个复数 i，使得 $i^2 = -1$，而且每个复数的形式均为 $a + bi$，其中 a 和 b 为实数。
2. 使用关系式 $i^2 = -1$ 和交换律，结合律以及分配律加，减及乘复数。
3. (+) 求得复数的共轭复数；使用共轭复数求得复数的模量和商。

在复数平面上描述复数及其运算。

4. (+) 在复数平面上以矩形和极坐标的形式描述复数（包括实数和虚数 ），并解释为什么给定复数的矩形和极坐标形式代表同一个数。
5. (+) 在复数平面上用几何学描述复数的加法，减法，乘法以及共轭；使用这种表示法的性质进行计算。*示例：$(-1+\sqrt{3}i)^3=8$，因为 $(-1+\sqrt{3}i)$ 有模量 2 和总量 120° 。*
6. (+) 计算复数平面中数之间的距离作为差异的模量，并计算线段的中点作为数在其终点的平均值。

在多项式恒等式和方程中使用复数。

7. 解决有复数解的实系数二次方程。
8. (+) 将多项式恒等式扩展至复数。*示例：将 x^2+4 改写为 $(x+2i)(x-2i)$。*
9. (+) 了解代数基本定理；证明这对二次多项式是成立的。

向量和矩阵数量 N-VM

用向量代表和模拟。

1. (+) 将向量识别为同时具有大小和方向。通过有向 l 线段描述向量，并且使用适当的向量符号及其大小（例如，$\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{v}|$, $\|\boldsymbol{v}\|$, v）。
2. (+) 通过从终点的坐标值减去起点的坐标值来发现向量的分量。
3. (+) 解决涉及速率和其它数量且可用向量表示的问题。

执行向量运算。

4. (+) 向量相加和相减。
   a. 按照端到端，按照分量逐个地以及通过平行四边形法则来将向量相加。理解两个向量之和的幅度，通常并不是幅度的和。
   b. 根据两个矢量的幅度和方向，确定其和的幅度和方向。
   c. 将矢量减法 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 理解为 $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{w})$，其中 $-\boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{w}$ 的加性逆元，具有与 $\boldsymbol{w}$ 相同的 幅度，而且指向相反的方向。按照适当的顺序连接尖端，从而图解描述向量减法，并按分量逐个地执行向量减法。
5. (+) 将一个向量乘以标量。
   a. 图解描述标量乘法的方法：缩放向量及可能地反转其方向； 按向量逐个地执行标量乘法，例如像 $c(v_x, v_y) = (cv_x, cv_y)$。
   b. 使用 $\|c\boldsymbol{v}\| = |c|\boldsymbol{v}$ 计算标量的幅度倍数 $c\boldsymbol{v}$ 。计算 $c\boldsymbol{v}$ 的方向，了解何时 $|c|\boldsymbol{v} \neq 0$，$c\boldsymbol{v}$ 的方向要么是与 $\boldsymbol{v}$ 相同（若 $c>0$），要么是与 $\boldsymbol{v}$ 相反（若 $c<0$）。

执行矩阵运算并将其运用于应用实例中。

6. (+) 使用矩阵表示和处理数据，例如，表示网络中的得益或发生率关系。
7. (+) 将矩阵乘以标量，以产生新的矩阵，例如，就像游戏中的所有得益都加倍。
8. (+) 加，减以及乘适当维度的矩阵。
9. (+) 要理解，与数字乘法不同，方阵的矩阵乘法不是一种变换运算，但仍不满足结合律和分配律。
10. (+) 理解零和恒等式矩阵在矩阵加法和乘法中发挥的作用，相似于 0 和 1 在实数中的作用。方阵的行列式是非零，当且仅当该矩阵有 乘法逆元。
11. (+) 将一个向量（视为有一列的矩阵）乘以一个有适当维度的矩阵，以产生另一个向量。将矩阵作为向量变换的进行处理。
12. (+) 将 2 × 2 矩阵处理为平面的变换，并解读面积行列式的绝对值。

数学 - 高中代数：导论

表达式

一个表达式是运用以下方面的计算记录：数字，代表数字的符号，算术运算，指数算法，以及在更高级水平上函数评价运算。关于 圆括号使用和运算顺序的规则，保证每一个表达式都无歧义。建立表达式，描述涉及概适数量的计算，需要概 括表达计算，从具体实例抽象的能力。

对表达式的阅读理解涉及对其基本结构的分析。这样可能会暗示不同但等效的表达式写法，展示其意义方面的一些不同。示例：$p + 0.05p$ 可以被解读为价格 p 加上 5%的税金。将 $p + 0.05p$ 改写为 $1.05p$ 表明加上税金，相同于用常数因子乘以其价格。

代数运算适用运算和指数的性质以及代数符号的约定。有时候，一个表达式是对更简单表达式运用运算的结果。示例：$p + 0.05p$ 是更简单表达式 p 和 $0.05p$ 的总和。将表达式视为更简单表达式的运算结果，有时可澄清其基本结构。

电子试算表或计算机代数系统 (CAS) 可用于试用代数表达式，执行复杂的代数运算，并理解代数运算如何表现。

方程和不等式

一个方程是两个表达式之间相等性的描述，常常被视为一个问题，询问两边表达式实际上等于哪些变量值。这些值都是该方程的解。一个
恒等式，相比之下，对变量的所有值都成立；恒等式的形成常常是源于将表达式改写成
等价形式。

一元方程的解形成一个数集，二元方程的解形成一个有序数对集，可以在坐标平面中布图。两个或以上的方程和/或不等式形成方程组/不等式组。这类方程组/不等式组的一个解必须满足组中的每个方程和不等式。

程连续演绎出一个或多个更简单的方程来解该方程。示例：方程的两边可以同时加上同一个常数，而不改变其解；但将方程的两边同时平方，则可能产生无关解。求解方面的策略能力，包括为有效计算预先做准备，和预期解的性质和个数。

有些方程在给定的数系中无解，但在更大的数系中则有解。示例：$x + 1 = 0$ 的解是一个整数，而不是一个完整数；$2x + 1 = 0$ 的解是一个有理数，而不是一个整数；$x^2 - 2 = 0$ 的解都是实数，而不是有理数；而 $x^2 + 2 = 0$ 的解是复数，而不是实数。

用于解方程的同解技术可用于重新排列公式。示例：不规则四边形的面积公式，$A = ((b_1+b_2)/2)h$，可以使用相同的演绎过程解得 h。

推断不等式的性质即可该对不等式求解。等式的很多而不是全部性质继续适用于不等式，并且可用于对其求解。

与函数和建模的关系。

表达式可以定义函数，而等价式则定义相同的函数。询问什么时候两个函数对方程的相同输入实例有相同值；对两个函数作图，以便求得 方程的适当解。在建模方面，将口头描述转换成一个方程式，不等式，或其联立 是必要的。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

代数概述

查看表达式的结构
- 解读表达式的结构
- 将表达式写成等效式写，以求出问题的解

算术运算：使用多项式和有理式
- 执行多项式的算术运算
- 理解多项式的零和因式之间的关系
- 使用多项式恒等式解决问题
- 改写有理式

建立方程
- 创建描述数字或关系的方程

用方程和不等式推理
- 将解方程理解为推理和解释推理的过程
- 解决一元方程和不等式
- 解方程组
- 用图解法代表和解决一元方程和不等式。

查看表达式的结构 **A-SSE**

解读表达式的结构。

1. 根据数量的环境，解读描述该数量的表达式。
   a. 解读表达式的各个部分，例如项，因式以及系数。
   b. 复杂表达式的解读方法：将其一个或多个部分视为单一的整体。*示例：将 $P(1+r)^n$ 解读为 P 和一个不取决于 P 的因式的乘积。*
2. 使用表达式的结构确定改写该表达式的方式。*示例：查看 $x^4 - y^4$ 是 $(x^2)^2 - (y^2)^2$，从而将其识别为平方差，可以列为因式$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$。*

将表达式写成等效式，以求出问题的解。

3. 选择并扩展表达式的等效算式，以揭示和解释 该表达式所描述数量的性质。
   a. 把一个二次表达式化为因子，以揭示其所定义的函数零点。
   b. 把一个二次表达式完全平方，以揭示其所定义的函数零点。
   c. 使用指数的性质转换指数函数的表达式。*示例：表达式 1.15^t 可被改写为$(1.15^{1/12})^{12t} \approx 1.012^{12t}$，以揭示近似等效的月利率，如果年利率为 15%的话。*
4. 导出有限几何级数的求和公式（当公比不为 1 时），并且使用该公式解决问题。*示例：计算按揭付款。*

多项式和有理式的四则运算 A-APR

执行多项式的算术运算。

1. 理解多项式形成一个类似于整数的系统，也就是，它们在加法，减法以及乘法的运算下具有封闭性；将多项式相加，相减以及相乘。

理解多项式的零和因式之间的关系。

2. 了解并运用剩余定理：对于一个多项式 $p(x)$ 和一个数 a，被 $x - a$ *相除的余数是* $p(a)$，因此当且仅当 $(x - a)$ 是 $p(x)$的一个因式时 $p(a) = 0$。
3. 确定多项式在可以进行因式分解时的零点，并使用零点绘制多项式所定义函数的草图。

使用多项式恒等式解决问题。

4. 证实多项式恒等式并将其用于描述数值关系。*示例：多项式恒等式* $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$ *可用于生成毕氏三元数。*
5. (+) 了解并运用二项式定理将$(x + y)^n$ 扩展成 x 和 y *的*正整数 n 次幂，其中 x 和 y *是任意数*，系数由杨慧三角形示例所确定。[1]

改写有理式。

6. 将简单有理式改写成不同的形式；将 $^{a(x)}/_{b(x)}$ 写成算式 $q(x) + {}^{r(x)}/_{b(x)}$，其中 $a(x)$，$b(x)$，$q(x)$ 以及 $r(x)$ 均为多项式，$r(x)$的次数小于 $b(x)$ 的次数，使用检验，长除法，或， 对于更复杂的示例： 计算机代数系统。
7. (+) 理解有理式形成一个类似于有理数的系统，在加以，减以，乘以以及除以非零有理式的情况下具有封闭性；加，减，乘以及除有理式。

[1] 二项式定理可以通过数学归纳或通过组合证明来证实。

建立方程 A-CED

创建描述数或关系的方程。

1. 解决一元方程和不等式，并使用它们解决问题。*包括起源于 线性和二次函数的方程，以及简单的有理和指数函数。*
2. 建立有两个或多个变量的方程，以描述数量之间的关系；在有标号和标度的坐标轴上给函数作图。
3. 描述方程或不等式的局限，方程和/或不等式其联立的局限，并在建模环境中将解解读为变量或非变量选项。*示例：提出不等式，描述 对不同食物组合的营养和成本限制。*
4. 重新排列公式，以着重强调感兴趣的数量，使用与解方程相同的推理。*示例；重新排列欧姆定律* $V = IR$*，以着重介绍电阻* R*。*

用方程和不等式推理 A-REI

将解方程理解为推理和解释推理的过程。

1. 将在解一元一次方程方面的每一步骤解释为起源于前一 步明确肯定的数等式，始于假设原方程有解。构建有效论证，以证明解法正确。
2. 解一元次有理方程和一元一次根式方程，并示例证明无关解可能会如何引起。

解决一元方程和不等式。

3. 解决一元线性方程和不等式，包括 l 系数用字母表示的方程。
4. 解决一元二次方程。
   a. 使用完全平方的方法将 x 的任何二次方程转换成有相同解的算式 $(x - p)^2 = q$。从这个算式得出求根公式。
   b. 解二次方程并检验（例如，对于 $x^2 = 49$），求平方根，完全平方，二次公式和因数分解为方程的初始形式，若适当的话。意识到何时 二次公式有复数解，并将其写为 $a \pm bi$，若 a 和 b 为实数。

解方程组。

5. 证明，假定方程组有两个二元方程，用它们的和与积得到的方程组，与原方程组有同解。
6. 确切而适当地（例如借助图形）求解线性方程组，着重于两个变量的线性方程组。
7. 用代数法和图解法解决由一个线性二元方程和一个二元二次方程组成的简单方程组。示例：找到直线 $y = -3x$ 和圆 $x^2 + y^2 = 3$ 之间的交叉点
8. (+) 将一个线性方程组表示为有一个矢量变量的简单矩阵方程 。
9. (+) 找到矩阵的逆元，如果存在的话，并用其求解线性方程组（使用维度 3 × 3 或更大矩阵的技术）。

用图解法代表和解决一元方程和不等式。

10. 理解二元方程的图形是其绘制于坐标平面的所有解的集合，常常形成一条曲线（也可能是一条直线）。
11. 解释为什么方程 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图形相交处各点的 x-坐标是 方程 $f(x) = g(x)$的解；近似求解，例如使用技术绘制函数的图形，做数值表，或找到逐次近似计算法。包括其中 $f(x)$ 和/或 $g(x)$ 为线性，多项式，有理数，绝对值，指数以及对数函数的情况。
12. 将线性二元不等式的解绘制为一个半平面（排除 严格不等式情况下的边界），并将线性二元不等式组的解集绘制成对应半平面的交叉。

数学 - 高中函数：导论

函数描述一个数量确定另一个数量的情境。示例：以 4.25%的实际年利率投资 10,000 美元的回报，就是这笔钱投资时间长度的函数。因为我们不断地推理数量的自然和社会依赖性，在构建数学模型方面，函数是重要的工具。

在学校数学方面，函数通常有数字输入和输出，而且常常由代数表达式进行定义。示例：一辆汽车行驶 100 英里花费的时间（以小时计），是该汽车速度 v（英里/小时）的函数，解法 $T(v) = 100/v$ 从代数上表达这种关系，并定义一个名称为 T 的函数。

函数输入值的集，就是该函数的域。我们经常推断该域就是定义函数的表达式有数值或该函数在给定环境中有意义的所有输入。

一个函数可以用各种方法进行描述，例如通过图形（例如地震仪踪迹）；通过言语规则，例如，“我将给您一个国家，您给我这个国家的都城”；通过代数表达式，例如 $f(x) = a + bx$；或者通过递归规则。函数的图形常常是一种有用的方式，可将函数模型的关系形象化，而处理函数的数学表达式，可以阐明该函数的性质。

被提呈为表达式的函数可以模拟很多重要现象。增长定律特征化的两个重要函数系列，均为线性函数，其中以恒定速率增长。有一个常数项零的线性函数描述比例关系。

绘图实用程序或计算机代数系统，可用于试用这些函数及其图形的性质，而且可用于构建函数的计算模型，包括递归定义的函数。

表达式，方程，建模以及坐标的联系

确定特定输入的输出值涉及评价一个表达式；发现产生给定输出的输入涉及对方称的求解。询问什么时候两个函数对方程的相同 输入实例有相同值，方程的解可以从两个函数提醒的交叉处形象化。因为函数描述数量之间的关系，建模中要频繁地用到它们。有时，函数由递归过程进行定义，而函数可以使用电子试算表或其它技术进行有效的显示。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

函数概述

解读函数
- 理解函数的概念并使用函数符号
- 依据该环境解读出现在应用中的函数
- 使用不同表示法分析函数

构建函数
- 构建一个函数，模拟两个数量之间的关系
- 根据现有函数构建新函数

线性，二次式以及指数模型
- 绘制并比较线性，二次以及指数模型，并解决问题
- 就函数所模拟情境解读其表达式

三角函数
- 使用单位圆扩展三角函数的域
- 用三角函数模型周期性现象
- 证实并运用三角函数恒等式

解读函数 F-IF

理解函数的概念并使用函数符号。

1. 理解从一个集（叫做域）到另一个集（叫做范围）的函数，给域的每个元素确切地分配范围的一个元素。如果 f 是一个函数，而 x 是其域内的一个元素，那么 $f(x)$ 就表示 f 与输入 x 相对应的的输出。f 的图形就是方程 $y = f(x)$ 的图形。
2. 使用函数符号，评价函数在其域内的输入，并解读将函数符号在给定环境的陈述。
3. 认识到序列就是函数，有时被递归定义，而其域就是整数的子集。*示例：$f(0) = f(1) = 1$，$f(n+1) = f(n) + f(n-1)$ for $n \geqslant 1$ 就是斐波纳契序列的递归性定义.*

依据该环境解读出现在应用中的函数。

4. 对于模拟两个数量之间关系的函数，从环境方面解读图形和表格的关键特征，而示意图表示关键特征给出这种关系的语言描述。*关键 特征包括：截距；间隔，其中该函数为递增，递减，正，或负；相对 最大值和最小值；对称性；结束行为；及周期性。*
5. 将函数的域与其图形相关，而且若适用的话，与其描述的定量关系相关。*示例：如果该函数 $h(n)$ 给出工厂内组装 n 台引擎花费的工时数，那么正整数将会是该函数的适当域。*
6. 计算和解读函数在特定间隔期间的平均变化率（象征性地或作为表格进行提呈）。根据该图形估计变化率。

使用不同表示法分析函数。

7. 图解用符号表达的函数，并显示图形的关键特征，在简单情况下用手，而在 更复杂的情况则使用技术。
   a. 图解线性和二次函，并显示截距，最大值以及最小值。
   b. 图解平方根，立方根以及分段函数，包括阶段式函数和绝对值函数。
   c. 图解多项式函数，确定适当因式分解可用时的零点，并显示结束行为。
   d. 图解有理函数，确定适当因式分解可用时的零点和渐近线， 并显示结束行为。
   e. 图解指数和对数函数，显示截距和结束行为，而三角函数则显示周期，中线以及幅度。
8. 写出一个函数，通过一个表达式按照不同但等效的方式对该函数进行定义，以揭示和解释该函数的不同性质。

a. 在一个二次函数中使用因式分解和完全平方的过程，以显示零点，极限值以及图形的对称性，并在环境中解读这些性质。
b. 使用指数的性质解读指数函数的表达式。示例：确定函数的百分比变化率，例如 y = (1.02)t，y = (0.97)t，y = (1.01)12t，y = (1.2)t/10，并将其分类为描述指数式增长或衰减。

9. 比较两个函数的性质，每个函数以不同的方式进行表述（代数上，图形上，数字上，用表格，或通过语言描述）。*示例：假定一个二次函数的一个图形，及另一个函数的代数表达式，说哪个的最大值更大。*

构建函数 F-BF

构建一个函数，模拟两个数量之间的关系。

1. 写出一个函数，描述两个数量之间的关系。
   a. 根据环境确定一个显式表达式，一个递归过程，或计算步骤。
   b. 使用算术运算组合标准函数类型。*示例：通过将常数函数加入衰减性指数式函数来构建一个模拟冷却体温的函数，并将这些函数与这些模型相关联。*
   c. (+) 编写函数。*示例：如果 $T(y)$ 是大气温度，作为高度的函数；而 $h(t)$ 是气象气球的高度，作为时间的函数，那么 $T(h(t))$ 就是气象气球所在位置的温度，作为时间的函数。*
2. 写出等差及等比级数，都既具有递归性也具有明确的公式，使用它们模拟情境，并在两个形式之间转换。

根据现有函数构建新函数。

3. 在图形上确定替换 $f(x)$ by $f(x) + k$, $k\,f(x)$, $f(kx)$ 以及 $f(x + k)$之特定 k 值的影响（k 既有 正值也有负值）；根据图形求得 k 值。试用图形案例并使用技术图解对图形的影响。包括根据函数的图形及其代数表达式识别函数的奇偶性。
4. 找到逆元函数。
   a. 求解算式 f(x) = c 的方程，用于一个有逆元的简单函数 f，并写出该逆元的表达式。*示例：$f(x) = 2x^3$ 或 $f(x) = (x+1)/(x-1)$，其中 $x \neq 1$。*
   b. (+) 通过如下组合进行验证：一个函数是另一个函数的逆元。
   c. (+) 根据图形或表格读取逆元函数的数值，假设该函数有逆元。
   d. (+) 通过限制域从不可逆函数产生可逆函数。
5. (+) 理解对数和指数之间的逆元关系，并使用这种关系解决涉及对数和指数的问题。

线性，二次式以及指数模型 F-LE

构建并比较线性，二次以及指数模型，并解决问题。

1. 区分可以用线性函数模拟的情境和可以用指数函数模拟的情境。
   a. 证实线性函数等间隔等差性增长，并证实指数函数等间隔等因式地增长。
   b. 识别其中一个数量相对于另一个数量以每单位间隔恒定速率发生变化的情境。
   c. 识别其中一个数量 相对于另一个数量以每单位间隔恒定速率增长或衰减的情境。
2. 根据图形，关系的描述，或两个输入-输出对（包括从表格中读取这些值），构建线性和指数函数，包括算术和几何级数。
3. 使用图形和表格观察，指数增长的数量事实上超过一个线性，二次，或（更一般的讲）作为多项式函数增长的数量。

4. 对于指数模型，表达为对数的 $ab^{ct} = d$ 的解，其中 a, c 以及 d 是数字，而底 b 为 2, 10, 或 e；使用技术评价对数。

就函数所模拟情境解读其表达式。

5. 从环境解读线性或指数函数的参数。

三角函数 F-TF

使用单位圆扩展三角函数的域。

1. 将角度的弧度理解为该角在单位圆上所对之弧的长度。
2. 解释单位圆在坐标平面中如何能够将三角函数扩展到所有实数，被解读为逆时针绕单位圆横切的角度的弧度。
3. (+) 使用特殊三角形用几何方法确定 $\pi/3$，$\pi/4$ 和 $\pi/6$ 的正弦，余弦，正切值，并使用该单位圆表示 x，$\pi + x$ 以及 $2\pi - x$ 的正弦，余弦以及正切值，其中就其各自的 x 值而言，x 是任意实数。
4. (+) 使用单位圆解释三角函数的对称性（奇偶性）和周期性。

用三角函数模型周期性现象。

5. 选择三角函数模型具有特定幅度，频率以及中线的周期性现象。
6. (+) 理解将三角函数限制在一个域上，该函数在其上总是增加或总是递减，从而能够绘制其逆元。
7. (+) 使用逆元函数解决建模环境中出现的三角函数方程； 使用技术评价方程的解，并在该环境中解读那些解。

证实并运用三角函数恒等式。

8. 证实毕氏恒等式 $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$，并鉴于该角的 $\sin(\theta)$，$\cos(\theta)$，或 $\tan(\theta)$ 和象限，使用它求得 $\sin(\theta)$，$\cos(\theta)$，或 $\tan(\theta)$。
9. (+) 证实正弦，余弦以及正切的加法和减法公式，并使用它们解决问题。

数学 - 高中建模：导论

建模将课堂数学和统计与日常生活，工作以及决策关联起来。建模是个这样的过程：选择和使用适当的数学和统计分析先验情境，以更好地理解它们，改善决策。对于数量及其在物理，经济，公共政策，社会以及日常情境方面的关系，可以使用数学和统计方法建模。在建立数学模型时，对于变换假设，探讨后果以及比较预测和数据而言，技术很重要。

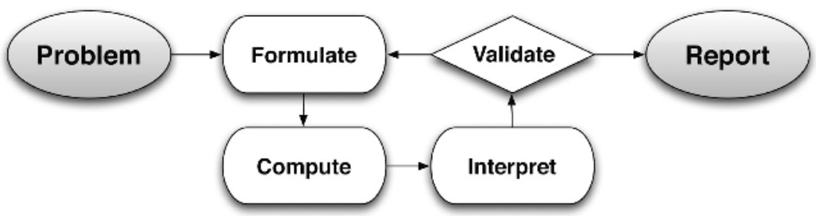
模型可以非常简单，例如将总成本写成产品的单价和所购买的数量，或者使用几何形状描述物理实体，如像硬币样。甚至这类简单的模型都涉及抉择。无论是将金币作为三维圆柱还是作为一个二维圆盘建立模型，足够好地为我们的目的服务，都取决于我们。其它情境——建立配送路线，生产计划，或贷款摊销比较模型——都需要更精确的模型，需要使用来自数学科学的其它工具。实际情境并没有为了分析而进行组织和标记；制定易处理的模型，描述这类模型，并对其进行分析，恰当地讲，就是一个创意过程。与每一个这样的过程一样，这取决于所获得的专门知识以及创造能力。

这类情境的一些可能范例包括：

- 如果 3 百万人口的城市遭受重创，估计紧急救援需要多少水和食物以及如何发放。
- 规划在一个有 4 个乒乓球台的俱乐部举办有 7 个选手的乒乓球锦标赛，其中每位选手都要同其他选手进行比赛。
- 设计学校园游会的摊位布局，以便筹集尽可能多的钱。
- 分析一辆汽车的停车距离。
- 建立储蓄帐户余额，细菌菌落生长，或投资增长的模型。
- 从事关键路径分析，例如飞机在机场的终点装卸时间。
- 分析诸如极限运动，流行病以及恐怖主义情境下的风险。
- 与个别预测相关的人群统计资料。

在类似这样的情境中，设计的模型取决于若干因素：我们想要或需要一个答案多准确？我们最需要理解，控制以及优化这种情境的哪些方面？我们拥有什么时间和工具资源？我们可以创建和分析的模型的范围，也同样受限于我们在数学，统计以及技术技能方面的局限，也受限于我们识别重要变量及其中关系的能力。各种图表，电子试算表及其它技术，以及代数，都是强大的工具，便于理解和解决从不同现实生活情境得出的问题。

数学建模提供的洞见之一就是，本质上相同的数学或统计结构，有时可以为看似不同的情境建立模型。模型还可以阐明数学结构本身，示例：就像细菌生殖模型使得指数函数的爆炸性增长更鲜明。



该图表总结了基本建模过程。它包括 (1) 确定情境中的变量并选定代表基本特征的那些变量，(2) 制定模型，方法是创建和选定几何，图形，表格，代数，或统计方面的表示形式，以描述变量之间的关系，(3) 对这些关系进行分析并执行运算，以得出结论，(4) 解读原始情境的 数学运算结果，(5) 将数学运算结果与情境进行对比来验证结论，然后再改善模型或，如果可接受的话，(6) 提出结论报告并推断其背后的原因。在整个过程期间，选择，假设以及近似都有出现。

在描述建模方面，一个模型简单地描述现象或对用简写形式其进行总结。观察资料图解是一种熟悉的描述性模型——示例：全球温度和大气 CO2 时间推移图。

解析建模寻求在更深理论思路的基础上解释数据，尽管参数是以经验为基础；示例：细菌菌落由于恒定生殖速率产生的指数增长（直至截止机制，例如污染或饥饿干预）。函数是分析 这类问题的重要工具。

实用绘图程序，电子试算表，计算机代数系统以及动态几何软件，都是强大的工具，可用于为纯粹数学现象（例如，多项式行为）以及物理现象建立模型。

建模标准

建模最好的诠释不是孤立主题的集合，而是相关其它标准的集合。建立数学模型是一项数学实践标准 (Standard for Mathematical Practice)。特定的建模标准在高中标准中标记为星号 ( )。

数学 - 高中几何：导论

对几何对象的属性和关系的理解，可以应用在不同的背景中——解释一个示意图，估计搭建斜坡屋顶的木材用量，渲染计算机图形，或者设计一种最有效用料的缝纫模式。

虽然几何学有许多分类，但中学数学主要致力于平面欧式几何，学习无坐标的综合几何和有坐标的解析几何。欧式几何最重要的特征是平行公设，即通过不在一条已知直线上的一点，只有一条直线与已知直线平行。（相比之下，球面几何没有平行线。）

在高中期间,学生们开始将从小学和初中获得的知识形成正式的几何学阅历，使用更精确的定义并培养慎密的的证明。此后在大学，一些学生会从一系列小的公理中认真学习欧式几何和其它几何学。

从几何变换的透视中可以理解全等，相似和对称的概念。基础是刚体运动：平移，旋转，反射，和它们的组合，这里假定所有这些保持距离和角度不变（并且形状总体也不变）。反射和旋转各自解释了一种特定类型的对称，并且对象的对称性揭示了它的属性——等腰三角形的反射对称确保了它的底角是全等的。

这里采用的方法是，如果有一系列的刚性运动将一个几何图形带到另一个几何图形上，那么这两个几何图形就定义为全等。这就是叠加原理。对于三角形，全等意味着所有对应的边和对应的角都是相等的。在中年级期间，通过按照已知条件画三角型的经历，学生们会注意到在三角型中指定足够的测度以确保所有用那些测度画出的三角形是全等的方法。一旦用刚性运动建立这些三角形全等的标准 (ASA, SAS 和 SSS)，它们就可以用来证明有关三角形，四边形和其它几何图形的定理。

相似变换（刚体运动后的扩张）按照刚性运动定义全等的方式定义相似性，从而在中年级时发展形成“同形”和“比例因子”的相似性概念。这些变换引导出三角形相似性标准，即两对相应的角是全等的。

锐角的正弦，余弦和正切的定义以直角三角形及相似性和勾股定理为基础，并且在很多现实生活和理论中至关重要。余弦定律将勾股定理推广至非直角三角形。在三个信息可以完全解析一个三角形时，正弦及余弦定律一起体现了三角形全等标准。进一步讲，这些定律在不确定情况下产生两种可能的解决方案，诠释边——边——角不是一个全等标准。

解析几何将代数和几何结合起来，成为强有力的分析和解决问题的方法。如同实数直线将数值和定位在一维空间结合，一对垂直轴将成对数值和定位在二维空间结合。这种数值坐标和几何点的对应关系使教学法可以从代数应用到几何，并且反之亦然。方程式的解集变为几何曲线，使运算和理解代数的工具可视化。方程式可以描述几何形状，使代数运算成为理解几何模型和证明的工具。方程式图形的几何变换对应于代数在方程式中的变化。

动态的的几何环境为学生们提供了实验和模型工具，使他们可以以计算机代数系统实验代数现象的类似方式来研究几何现象。

连接方程式。
这种数值坐标和几何点的对应关系使教学法可以从代数应用到几何，并且反之亦然。方程式的解集变为几何曲线，使运算和理解代数的工具可视化。方程式可以描述几何形状，使代数运算成为理解几何，模型化和证明的工具。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

几何概述

全等
- 平面中的变换实验
- 从刚性运动理解全等
- 证明几何定理
- 构建几何结构

相似性，直角三角形和三角学
- 从相似变换中理解相似性
- 证明有关相似性定理
- 定义三角比并解决涉及直角三角形的问题
- 将三角学应用于一般三角形

圆
- 理解和应用关于圆的定理
- 计算圆的弧长和扇形的面积

用方程式表述几何特性
- 在一个圆锥截面的几何描述和方程式之间进行互相转换
- 用代数方法使用坐标证明简单的几何定理

几何度量和维度
- 解释体积公式，并用它们解决问题
- 对二维对象和三维对象间的关系形成思维图像

几何建模
- 在建模情境中应用几何概念

全等 G-CO

平面中的变换实验
1. 基于点，线，一条线的距离，和一个圆弧的距离的未定义概念，知道角，圆，垂直线，平行线，和线段的精确定义。
2. 在平面中使用诸如幻灯片和几何软件呈现变换。描述变换将平面中的点作为输入和给出其它点作为输出的功能。比较保持距离和角度的变换和非保持距离和角度的变换（例如：平移与水平拉伸）。
3. 已知一个矩形，平行四边形，梯形，或正多边形，描述其自身所做的旋转和反射。
4. 研究角，圆，垂直线，平行线和线段的旋转，反射和平移的定义。
5. 已知一个几何图形和一个旋转，反射或平移，使用例如方格纸，描图纸或几何软件绘出变换的图形。指定一个将已知图形带到另一图形的变换序列。

从刚性运动理解全等

6. 使用刚性运动对变换图形的几何描述，并预测一已知刚性运动在另一已知图形上的结果。使用关于刚性运动的全等定义决定两个已知图形是否全等。
7. 使用关于刚性运动全等的定义展示如果并且只有相对应的边和相对应的角是全等的，则两个三角形是全等的。
8. 解释如何从关于刚性运动全等的定义得出三角形全等的标准 (ASA，SAS 和 SSS)。

证明几何定理

9. 证明关于直线和角度的定理。*定理包括：直角是全等的；一条截线穿过平行线，内错角是全等的，并且同位角也是全等的；线段的垂直平分线上的点到这条线段的两端距离相等。*
10. 证明有关三角形的定理。定理包括：*三角形内角之和等于 180°；等腰三角形全等；三角形两条边中点的连线平行于第三边，并等于其长度一半；三角形的三边中线交于一点。*
11. 证明有关平行四边形的定理。*定理包括：对边全等，对角全等，一个平行四边形的对角线互相平分，反之，对角线全等的矩形是平行四边形。*

构建几何结构

12. 用各种工具和方法构建正式的几何结构（圆规，直尺，线绳， 反射装置，折纸，动态几何软件等）。*复制一条线段；复制一个三角形；平分一个线段；平分一个角；构建垂直线，包括一条线段的垂直平分线；通过不在已知线上的一点构建它的平行线。*
13. 构建一个等边三角形，正方形，和圆内接正六边形。

相似性，直角三角形和三角学 G-SRT

从相似变换中理解相似性

1. 通过实验验证已知中心和比例因子的膨胀特性：
   a. 膨胀将一条不经过膨胀中心的直线带到平行线，经过中心的不变。
   b. 线段的膨胀是按照已知的比例因子的比率变得更长或更短。
2. 已知两个图形，从相似性变换角度使用相似性定义来决定他们是否是相似；使用相似变换解释所有对应角相等，和所有对应边成比例性的三角形相似性的含义。
3. 使用相似变换特性建立两个三角形相似的 AA 标准。

证明有关相似性定理

4. 证明有关三角形的定理。*定理包括：平行于三角形一边的直线将其它两边成比例分割，反之亦然；使用三角形相似证明勾股定理。*
5. 使用三角形全等和相似性准则，解决问题并证明中几何图形的关系。

定义三角比并解决涉及直角三角形的问题

6. 通过相似理解直角三角形边长比是三角形中角的特性，引导出锐角三角形三角比的定义。
7. 解释并运用余角的正弦和余弦关系。
8. 在应用题中运用三角比和勾股定理解决直角三角形问题。

将三角学应用于一般三角形

9. (+) 通过从顶点画一条垂直于对边的辅助线，推导三角形面积公式 $A = 1/2\ ab \sin(C)$。
10. (+) 证明正弦和余弦定律并使用它们来解决问题。
11. (+) 理解并应用正弦和余弦定律在直角和非直角三角形中发现未知度量（例如：测量问题，合力）。

圆 G-C

理解和应用关于圆的定理

1. 证明所有圆相似。
2. 识别并描述内接角，半径和弦之间的关系。*包括圆心角， 内接和外切角之间的关系； 直径上的内接角*

是直角；圆的半径垂直于半径相交圆的切线。
3. 构建三角形的内接和外切圆，并证明圆内接四边形的角的特性。
4. (+) 从已知圆以外的一点构建到圆的切线。

计算圆的弧长和扇形的面积
5. 使用相似推导一个角截取的弧与半径成正比，并将角的弧度定义为比例常数；推导扇形面积的公式。

用方程式表述几何特性 **G-GPE**

在一个圆锥截面的几何描述和方程式之间进行互相转换
1. 使用勾股定理推导一个已知圆心和半径的圆的方程式；通过已知的方程式完成正方形， 找到圆的圆心和半径。
2. 推导已知一个焦点和准线的抛物线方程。
3. (+) 运用从焦点的距离之和或差是恒定的事实来推导已知焦点的椭圆和双曲线方程。

用代数方法使用坐标证明简单的几何定理
4. 用代数方法使用坐标证明简单的几何定理。例如，证明或反证四个已知点在坐标平面定义的图形是一个矩形；证明或反证点 $(1, \sqrt{3})$ 位于原点为中心的圆上并包含点$(0, 2)$。
5. 证明平行和垂直线的斜率标准并使用它们来解决几何问题（例如：找出通过一个已知点，平行或垂直于已知直线的直线方程式）。
6. 以已知比例分割线段的两个已知点之间找出有向线段上的点。
7. 用坐标计算多边形周长和三角形及矩形的面积，例如，使用距离公式。

几何度量和维度 **G-GMD**

解释体积公式，并用它们解决问题
1. 给出圆周，圆面积，圆柱体，金字塔和锥体体积公式的非形式论点。*使用剖分幅角，卡瓦列里的原理，和非形式的极限幅角。*
2. (+) 运用卡瓦列里原理，给出球体和其它立体图形体积公式的非形式论证。
3. 使用圆柱体，金字塔，锥体和球体的体积公式来解决问题。

对二维对象和三维对象间的关系形成思维图像
4. 识别三维对象的二维横截面形状，并识别二维对象旋转产生的三维对象。

几何建模 **G-MG**

在建模情境中应用几何概念
1. 使用几何形状及其度量和特性描述对象（例如：用树干或人体躯干建模圆柱体）。
2. 在建模情境中应用基于面积和体积的密度概念（例如：每平方英里人数，每立方英尺 BTU）。
3. 应用几何方法解决问题（例如：设计一个满足物理限制或最低成本的对象或结构；用基于比率的排版网格系统工作）。

数学 - 高中统计和概率：导论

决定和预测经常基于数据——上下文中的数字。如果数据总能提供清楚的信息，做出决定或预测会很容易。但是由于变异性，信息常常是模糊的。统计为描述数据中的变异性，以及做出将变异性考虑在内的合理决定提供了工具。

采集，显示，总结，检查和解释数据，以发现模型并从中发现偏差。定量的数据可以关键特征描述：形状的度量，中心和扩展。数据分布的形状可以描述为对称的，扭曲的，扁平的，或钟形，并且它可以是由统计测量中心（如均值或中位数）和统计测量扩张（如标准偏差或四分位差）概括。可以用这些统计进行数字化比较，或用直观图比较不同的分布。居中和扩张的知识不足以描述分布。比较何种统计，使用什么图，以及比较结果的含义，取决于调查的问题和采取的现实行动。

随机化在得出统计结论中有两个重要作用。首先，从一个人口的随机样本中采集数据考虑了变异性，使得出关于整体人口有效结论成为可能。其次，随机将个体分派不同的处理可使这些处理结果公平地比较。统计的有意义的结果是不太可能由偶然机会得出，并且其只能在随机条件下评估。采集数据的条件在从数据中得出结论中是重要的。在严格审查用于公共媒体和其他报告的统计中，考虑研究设计，如何采集数据，采用的分析及数据总结，和得出结论是重要的。

可以用概率模型从数学上描述随机过程：可能结果（样本空间）的列表或描述，每个被分配一个概率。在翻转硬币，滚动数字骰子或抽出一张牌的情况下，假定各种可能均等的结果是合理的。在概率模型中，样本点代表结果并结合组成事件。可以用加法和乘法规则计算事件的概率。解释这些概率依赖于对独立性和条件概率的理解，通过分析双向表可以做到这点。

技术在统计和概率中起着重要作用，技术使生成图表，回归函数，和相关系数成为可能，并在短时间内模拟许多可能的结果。

与函数和建模的关系。

函数可以用来描述数据。如果数据表明一个线性关系，这种关系可以用回归线建模，其强度和方向可以通过相关系数表示。

数学练习

1. 理解问题并坚持不懈地解决问题。
2. 抽象和定量推理。
3. 建立可行的论点并评析他人的推理。
4. 数学模型。
5. 策略性地使用适当的工具。
6. 注重精确性。
7. 寻找并利用结构。
8. 寻找并表达反复推理中的规律性。

统计和概率概述

解释分类和定量数据

- 在单一计数或测量变量上总结，呈现，和解释数据
- 在两个分类和定量变量上总结，呈现，和解释数据
- 解释线性模型

做出推论和证明的结论

- 理解和评估随机过程基本的统计实验
- 从样本调查，实验和观测学习中做出推论和证明的结论。

条件的概率和概率的规则

- 理解独立性和条件概率并运用它们解释数据
- 运用概率规则在一个一致概率模型中计算复合事件的概率

使用概率做决定

- 计算预期的数值，并用它们解决问题
- 使用概率评估决定的结果

解释分类和定量数据 S-ID

在单一计数或测量变量上总结，呈现，和解释数据

1. 用图表在实数线上呈现数据（散点图，直方图，箱线图）。
2. 使用统计将数据分布的形状分配给两个或多个不同数据集的比较中心（中位数，均值）和扩张（四分位距，标准偏差）。
3. 在数据集的语境中解释形状，中心和扩张的区别，说明极端数据（异常值）的可能结果。
4. 将数据集的均值和标准偏差用于正态分布并估计人口百分比。识别程序不适用的数据集。使用计算器，电子表格和表单估计正态曲线下的面积。

在两个分类和定量变量上总结，呈现，和解释数据

5. 在双向频率表中给两个分类总结分类数据。在数据语境中解释相对频率（包括联合，临界和条件的相对频率）。识别数据中可能的联系和趋势。
6. 在散点图上呈现两个定量变量的数据，并描述变量之间的关系。
    a. 将函数与数据拟合。使用函数拟合数据在数据环境中解决问题。使用已知函数或选择环境建议的函数。强调线性，二次，指数模型。
    b. 通过绘图和分析残差，非形式地评估函数的拟合。
    c. 为建议线性关联的散点图拟合线性函数。

解释线性模型

7. 在数据环境中，解释线性模型的斜率（变化率）和截距（常数项）。
8. 计算（使用技术）并解释线性拟合的相关系数。
9. 区分相关性和因果关系。

做出推论和证明的结论 S-IC

理解和评估随机过程基本的统计实验

1. 了解统计作为一个过程，做出人口参数的推论，该参数基于从人口中随机抽样。
2. 决定指定的模型是否与从已知数据生成过程的结果相一致，例如，使用模拟。*例如，一个模型表示一枚旋转的硬币正面朝上落下的概率为 0.5。你会因为一个连续 5 次反面向上的结果质疑这个模型吗？*

从抽样调查，实验和观测学习中做出推论和证明的结论

3. 认识抽样调查，实验，和观察学习的目的及区别。解释其相关的随机化。
4. 使用抽样调查的数据估计人口均值或比例。通过使用随机抽样的仿真模型开发一个误差幅度。
5. 使用随机实验的数据来比较两种处理方法。使用模拟来确定参数间的差异是否显著。
6. 评估基于数据的报告。

条件的概率和概率的规则 S-CP

理解独立性和条件概率并运用它们解释数据

1. 使用结果特征（或类）描述事件样本空间（结果集）的子集，或描述并集，交集或其他事件（“或”，“与”，“非”）的余集。
2. 理解如果 *A* 和 *B* 同时发生的概率是它们概率的积，则两个事件 *A* 和 *B* 是独立的，并运用这个特性来确定它们是否独立。
3. 理解 *A* 给定 *B 作为* $P(AB)/P(B)$ 的条件概率，并依照 *A* 给定 *B* 的条件概率与 *A* 的概率相同，并且 *B* 给定 *A* 的条件概率与 *B* 的条件概率相同来解释 *A* 和 *B* 的独立性。
4. 当两个类与被分类的每个对象关联时，构建并解释数据的双向频率表。使用双向表作为样本空间，决定事件是否独立，并近似条件概率。*例如，从随机抽样中采集数据，你所在学校的学生在数学，科学和英语中最喜欢哪个科目。估计一个从你所在学校随机选择的学生将喜欢科学的概率，已知该学生在十年级。照此完成其他学科的概率并比较结果。*
5. 识别日常生活中的条件概率和独立性，并用日常语言予以解释。*例如，将如果你是一个吸烟者，患肺癌的机会与如果你患肺癌，是吸烟者的机会相比较。*

运用概率规则在一个一致概率模型中计算复合事件的概率

6. 找出条件概率：*A* 给定 *B* 作为 *B* 的结果的分数，该结果也属于 *A*，并从模型角度解释答案。
7. 运用加法规则，P(A U B) = P(A) + P(B) – P(AB)，并从模型中解释答案。
8. (+) 在一致概率模型中运用一般的乘法规则， P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)，并从模型中解释答案。
9. (+) 用排列组合来计算复合事件的概率并解决问题。

使用概率做决定 S-MD

计算预期的数值，并用它们解决问题

1. (+) 通过给样本空间中每个事件赋值，给一定数量的利息定义一个随机变量。使用数据分布相同的图形显示给相应概率分布绘图。
2. (+) 计算随机变量的预期值。从概率分布的均值进行解释。
3. (+) 为定义为理论概率可计算的样本空间的随机变量开发概率分布。找出预期值。*例如，在一个多项选择测试中，每个问题有四个选项，找出通过猜测所有五个问题得到正确答案数的理论概率分布，并在各种分级方案下找出预期的等级。*
4. (+) 为定义为实证指定概率的样本空间的随机变量开发概率分布。找出预期值。*例如，得出美国每户家庭电视机数量的当前数据分布，并计算每个家庭电视机的预期数量。在 100 个随机选择的家庭中，你期望有多少台电视机？*

使用概率评估决定的结果

5. (+) 通过给收益值分配概率，权衡决定可能的结果，并且找出预期值。
   a. 找出一个机会游戏的预期收益。*例如，从国家彩票或快餐店的游戏中，找出预期的胜率。*
   b. 在预期值基础上，评估并比较策略。*例如，使用各种合理的有一个小或大事故的机会，比较高免赔额与低可扣除的汽车保险政策。*
6. (+) 运用概率做出公正的决定（例如：抽签，使用随机数发生器）。
7. (+) 使用概率概念分析决定和策略（例如：产品测试，医学测试，比赛最后拉一个曲棍球守门员）。

关于课程和变化注释

《数学内容标准》的高中部分规定了所有学生为大学和职业做准备而应该学习的数学内容。这些标准并未规定高中课程序列。然而，高中学校课程的组织是标准实施的一个关键组成部分。为此，高中数学样本衔接——以传统的课程序列（代数 I，几何，和代数 II ）以及集成的课程序列（数学 1，数学 2，数学 3）——将在最终的《州共同核心标准》发布后很快发布。预计，基于这些标准的额外的模型衔接也将会公布。

标准本身并不支配课程，教学方法或内容输送。特别是，各州可用不同方式处理过度。例如，美国许多学生在 8 年级学习代数 I，这在许多州是个规定。K-7 标准包含了学生在 8 年级前准备代数 I 的先决条件，并且标准允许各州继续有关在 8 年级教学代数 I 的现行政策。

第二个主要切换是从高中到为大学和职业准备的后中学教育。关于大学和职业准备的证据清楚表明，包括标准中用 (+) 符号标明的大量数学知识，技能和实践是重要的。实际上，为大学和职业准备的某些最优先的内容来自于 6-8 年级。本材料的主题包括非常实用的熟练能力，如在现实世界和数学问题中应用比率推理，用正，负分数和小数流利计算，解决涉及角度测量，面积，表面积，和体积的现实和数学问题。因为为大学和职业准备的重要标准是跨年级和跨课程分散的，所以系统为评估大学和职业准备应回溯到标准中的 6-8 年级。同时请注意，削减学分或其它由大学和职业准备的评估系统生成的信息应该与高等教育和劳动力发展项目的代表合作开发，并应该由学生在大学和劳动力市场的后续表现验证。

术语表

不等式的特性。参见本术语表表 5。

百分比变化率。以百分比表示的变化率。例如：如果一年中人口从 50 增长到 55，其每年增长为 5/50 = 10%。

乘法结合律。参见本术语表表 3。

乘法逆元。两个积为 1 的数字互为乘法逆元。例如：3/4 和 4/3 互为乘法逆元，因为 $3/4 \times 4/3 = 4/3 \times 3/4 = 1$.

独立合并概率模型。如果组合模型中每个有序对的概率等于有序对中两个个体结果原始概率的积，则两个概率模型是独立合并的。

等式的特性。参见本术语表表 4。

第三四分位数。中位数 M 的数据集中，第三四分位数是大于 M 的数值中位数。例如：数据集 {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120} 的第三四分位数是 15。*参见：*中位数，第一四分位数，四分位差。

第一四分位数。中位数 M 的数据集中，第一四分位数是小于 M 的数值中位数。例如：数据集 {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, t 第一四分位数是 6。[1] *参见：*中位数，第三四分位数，四分位差。

带状图。看起来像一段带子样的绘图，用于图示数值关系。也称为条形图，条状模型，分数带或长模型。

点阵图。参见：线阵图。

二元数据。关联的数字对观测值。例如：足球队每个队员的身高和体重列表。箱形图。一种使用中位数，四分位数和数据集极端的直观显示数据值分布的方法。箱型显示数据的中间 50%。[2]

繁分数。分数 A/B 中， A 和/或 B 是分数 （ B 非零）。

分数。以 a/b 形式表达的数字，a 是一个整数并且 b 是一个正整数。（在这些标准中，分数总是指一个非负数。）*参见：*有理数。

概率。0 和 1 间的数字，用于处理具有不确定结果的量化可能性（比如抛硬币，从人群中随机选择一人，向目标抛球，或者测试医疗条件）。

概率分布。随机变量与其概率分配的可能数值集。

概率模型。概率模型用于给一个机会过程的结果通过检查过程的性质指定概率。所有结果的集称为样本空间，并且它们的和为 1。*参见：*一致概率模型。

刚性运动。点在空间的变换，由一系列的一个或多个平移，反射，和/或旋转组成。此处的刚性运动假定为保持距离和角度度量不变。

加法结合律。参见本术语表表 3。

交换性。参见本术语表表 3。

间接度量的传递性原理。如果对象 A 的长度大于对象 B 的长度，并且对象 B 的长度大于对象 C 的长度，那么对象 A 的长度大于对象 C 的长度。该原理也适用于其它数量的度量。

计算策略。可选为解决特定问题的有目的的操作，可能没有固定顺序，也可能目的在于将一个问题转换为另外一个。参见算法。

继续向上计数。没有计数对象所在组群的每个成员而找出对象数量的策略。例如，如果书店已知有 8 本书，并且顶上再增加 3 本书，则不需要重新数遍整个书架。员工可以通过计数发现总数——定位顶层的书数“八”，然后跟着“九，十，十一。现在共有十一本书。”

加性逆元。两个和为 0 的数字互为加性逆元。例如： 3/4 和 – 3/4 一个是另一个的加性逆元，因为 3/4 + (– 3/4) = (– 3/4) + 3/4 = 0.

均值。数字数据集内中心的度量值。通过将列表中的值相加，然后除以列表中位数的数量计算。[3] 例如：数据集 {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120} 的 均值是 21。

0 的恒等性。参见本术语表表 3。

平均绝对偏差。数字数据集中变量的测度。通过将每个数据值和均值间的距离相加，然后除以数据值的数量计算。例如：数据集 {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120} 的平均绝对偏差是 20。

膨胀变换。沿着射线通过从固定中心散发的点移动每个点的变换，并从中心由共用比例系数乘以距离。

全等。两个平面或立体图形，如果通过刚性运动（一系列旋转，反射和平移）从其中一个可以得到另一个，则两个图形全等。

期望值。对一个随机变量，其可能数值的加权平均，通过各自的概率给定的权重。

散点图。坐标平面中呈现二元数据集的图形。例如：一组人的身高和体重可以在散点图上显示。[4]

四分位差。数字数据集里变化的测度。四分位差是数据集的第一和第三个四分位数之间的距离。例如：数据集 {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}， 四分位差是 15 – 6 = 9。*参见：*第一四分位数，第三四分位数。

算法。一组用于一类的问题的预定义步骤，当正确执行步骤时，在各种情况下都能给出正确的结果。参见：计算策略。

随机变量。给每个样本空间中结果分配数字数值。比例表达式。分母非零的两个多项式的商。

矢量。平面或空间中，既有大小又有方向的量，由一个有序对或三重实数定义。

实数直线图。实数直线图用于呈现数字和支持它们的推理。在度量数量的实数直线图中，图上从 0 至 1 的区间代表数量的度量单位。

5，10，20，100 或 1000 以内加法和减法。两个整数和整数答案的加法或减法，并且和与被减数范围分别在 0-5，0-10，0-20 或 0-100 之内。例如：8 + 2 = 10 是 10 以内加法，14 – 5 = 9 是 20 以内减法，55 – 18 = 37 是 100 以内的减法。

循环小数。有理数的小数形式。*参见：*有尽小数。

相似变换。一个刚性运动，随后是膨胀。

线阵图。一种直观地显示数据值分布的方法，在一条数字线上每个数据值显示为一个点或标记。也称为点阵图。[5]

样本空间。随机过程的概率模型中，被考虑的个体结果列表。

有尽小数。如果一个小数循环数字为 0，则称为有尽小数。

有理数。为某个分数 a/b 可表达为 a/b 或 – a/b 的数。有理数包括整数。

运算的特性。参见本术语表表 3。

运算的特性。参见本术语表表 3。

一致概率模型。给所有结果分配相等概率的概率模型。*参见：*概率模型。

直观分数模型。带状图，数字线图或面积模型。

展开式。一个多位数字可以展开式表达，即将其写作一个单位数字十的幂倍数之和。例如：643 = 600 + 40 + 3。

整数。某个整数 a，数字可以表示为 a 或 – a 的形式。

整数。数字 0, 1, 2, 3......

中位数。数字数据集内中心的测度。数值列表的中位数是排序后列表的中心数值。如果列表中数值数量是偶数，则为两个中心值的均值。例如：数据集 {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 90} 的中位数是 11。

中线。三角函数图中，水平线在其大值和最小值的中间。100 以内的乘除法。两个整数和整数答案的乘法和除法，并且积与被除数范围在 0-100 之内。例如：72 ÷ 8 = 9。

直线图形。所有角都是直角的多边形。

[1] 许多不同的教学法用于计算四分位数。此处定义的教学法有时也称为穆尔（Moore）和麦凯布（McCabe）方法。参见 Langford, E.,“Quartiles in Elementary Statistics,” Journal of Statistics Education Volume 14, Number 3 （2006 年）。

[2] 改编自威斯康星州公共教学部 http://dpi.wi.gov/ standards/mathglos.html，2010 年 3 月 2 日。

[3] 更准确地说，这是算术平均值的定义。

[4] 改编自威斯康星州公共教学部, 同上。

[5] 改编自威斯康星州公共教学部, 同上。

表格 1。常见的加法和减法情况。[1]

	结果未知	变化未知	开始未知
添加到	两只小兔子坐在草地上。又有三只小兔子跳了过去。现在草地上有多少只小兔子？ 2 + 3 = ?	两只小兔子坐在草地上。一些更多的小兔子跳了过去。此时，有五只小兔子。多少只小兔子跳到了最初的两只那里？ 2 + ? = 5	一些小兔子坐在草地上。又有三只小兔子跳了过去。此时，有五只小兔子。此前，草地上有多少只小兔子？ ? + 3 = 5
取走	桌上有五个苹果。 我吃掉了两个苹果。现在桌上有多少个苹果？ 5 － 2 = ?	桌上有五个苹果。我吃掉了几个苹果。此时，还有三个苹果。我吃掉了几个苹果？ 5 － ? = 3	桌上有一些苹果。我吃掉了两个苹果。此时，还有三个苹果。此前，桌上有几个苹果？ ? － 2 = 3
	完全未知	**加数未知**	**两个加数未知**[2]
合并/分开[3]	桌上有三个红苹果和两个绿苹果。桌上有多少个苹果？ 3 + 2 = ?	桌上有五个苹果。三个是红的，其余是绿的。桌上有多少个绿苹果？ 3 + ? = 5, 5 － 3 = ?	奶奶有五支花。她可以放到红色花瓶多少支？放到绿色花瓶多少支？ 5 = 0 + 5, 5 = 5 + 0 5 = 1 + 4, 5 = 4 + 1 5 = 2 + 3, 5 = 3 + 2
	差别未知	**更大的未知**	**更小的未知**
比较[4]	（“多几个？”版本）：露西有两个苹果。朱莉有五个苹果。朱莉比露西多几个苹果？ （“少几个？”版本）：露西有两个苹果。朱莉有五个苹果。露西比朱莉少几个苹果？ 2 + ? = 5, 5 － 2 = ?	（“更多”版本）：朱莉比露西多三个苹果。露西有两个苹果。朱莉有几个苹果？ （“更少”版本）：露西比朱莉少 3 个苹果。露西有两个苹果。朱莉有几个苹果？ 2 + 3 = ?, 3 + 2 = ?	（“更多”版本）：朱莉比露西多三个苹果。朱莉有五个苹果。露西有几个苹果？ （“更少”版本）：露西比朱莉少 3 个苹果。朱莉有五个苹果。露西有几个苹果？ 5 － 3 = ?, ? + 3 = 5

[2]这些分开情况可用于展示所有已知数字的分解。总计在等号左边的相伴方程，帮助孩子们理解等号并不总是意味着闭合或结果，却总意味着相同的数字。
[3]任一加数可能未知，所以这些问题情况有三个变量。两个加数未知是这种基本情况的积的扩展，特别是小于等于 10 的小数字。
[4]更大的未知或更小的未知情况，一个版本指导了正确的运算（该版本将“更多”用于更大的未知，“更少”用于更小的未知）。其它版本更为困难。

---

[1]改变自 《Mathematics Learning in Early Childhood》的 Box 2-4，国家研究理事会 （ 2009 年 32-33 页）。

表格 2。常见的的乘法和除法情况。[1]

	未知积 $3 \times 6 = ?$	群体规模未知 （“每组多少人？”部分） $3 \times ? = 18$ 和 $18 \div 3 = ?$	群体数 未知 （“多少组？”部分） $? \times 6 = 18$ 和 $18 \div 6 = ?$
等于 群体	有 3 个袋子，每袋有 6 个李子。总共有多少个李子？ *度量例子*。你需要 3 根线绳，每根 6 英寸长。总共需要多长线绳？	如果 18 个李子平均放入 3 个袋子，那么每个袋子有多少个李子？ *度量例子*。你有 18 英寸线绳，你将其均分为 3 段。每段线绳有多长？	如果将 18 个李子分成 6 个一袋，那么需要多少个袋子？ *度量例子*。你有 18 英寸线绳，将其分成每段 6 英寸长。会分成多少段线绳？
阵列 [2] 面积 [3]	有 3 行苹果，每行 6 个。一共有多少个苹果？ *面积例子*。3 cm 乘 6 cm 的矩形面积是多少？	如果将 18 个苹果排成 3 等行，每行多少个苹果？ *面积例子*。一个矩形面积为 18 平方厘米。如果一边是 3 cm 长，邻边是多长？	如果将 18 个苹果排成 6 个苹果的等行，会排成多少行？ *面积例子*。一个矩形面积为 18 平方厘米。如果一边是 6 cm 长，邻边是多长？
比较	蓝帽子价格 6 美元。红帽子价格是蓝帽子的 3 倍。红帽子多少钱？ *度量例子*。一根橡皮筋 6 cm 长。将其伸长 3 倍时，有多长？	红帽子的价格是 18 美元，并且是蓝帽子价格的 3 倍。蓝帽子价格多少钱？ *度量例子*。将一根橡皮筋拉伸为 18 cm 长，此时是其最初长度的 3 倍。橡皮筋最初是多长？	红帽子的价格是 18 美元，蓝帽子价格 6 美元。红帽子的价格是蓝帽子价格的多少倍？ *度量例子*。一根橡皮筋最初 6 cm 长。现在将其拉伸为 18 cm 长。此时长度是其最初长度的多少倍？
常规	$a \times b = ?$	$a \times ? = p$, and $p \div a = ?$	$? \times b = p$, and $p \div b = ?$

2 阵列例子中的语言显示阵列问题最容易的形式。困难的形式用于行和列：杂货店橱窗中的苹果排成 3 行 6 列。一共有多少个苹果？两种形式都是有价值的。
3 面积涉及已压在一起没有间隙或重叠的正方形阵列，所以阵列问题包括这些特别重要的测量情况。

1 每格中的第一个例子是离散事物的例子。这些对学生们更容易，并应该在测量例子前给出。

表格 3。运算的特性。这里 *a*，*b* 和 *c* 代表一个已知数字系统中的任意数。运算的特性应用于有理数系统，实数系统，和 复数系统.

加法结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$
加法交换律	$a+b=b+a$
0 的加法恒等性	$a+0=0+a=a$
加性逆元的存在性	每个 a 存在 $-a$ 所以 $a+(-a)=(-a)+a=0$
乘法结合律	$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
乘法交换律	$a\times b=b\times a$
1 的乘法恒等性	$a\times 1=1\times a=a$
乘法逆元存在性	每个 $a\neq 0$ 存在 $1/a$ 所以 $a\times 1/a=1/a\times a=1$
乘法加法分配性	$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

表格 4。等式的特性。这里 *a*，*b* 和 *c* 代表一个有理数，实数，或复数系统中的任意数。

等式的自反性	$a=a$
等式的对称性	如果 $a=b$, 那么 $b=a$
等式的可迁性	如果 $a=b$ 并且 $b=c$, 那么 $a=c$
等式的加法性	如果 $a=b$, 那么 $a+c=b+c$
等式的减法性	如果 $a=b$, 那么 $a-c=b-c$
等式的乘法性	如果 $a=b$, 那么 $a\times c=b\times c$
等式的除法性	如果 $a=b$ *并且* $c\neq 0$, 那么 $a\div c=b\div c$
等式的替代性	如果 $a=b$, 那么 b 在任何包含a 的表述中可以是 a 的替代。

表格 5。不等式的特性。这里 *a*，*b* 和 *c* 代表一个有理数，实数系统中的任意数。

下列之一为真：$a<b$, $a=b$, $a>b$。
如果 $a>b$ 并且 $b>c$ 那么 $a>c$。
如果 $a>b$, 那么 $b<a$。
如果 $a>b$, 那么 $-a<-b$。
如果 $a>b$, 那么 $a\pm c>b\pm c$。
如果 $a>b$ 并且 $c>0$, 那么 $a\times c>b\times c$。
如果 $a>b$ 并且 $c<0$, 那么 $a\times c<b\times c$。
如果 $a>b$ 并且 $c>0$, 那么 $a\div c>b\div c$。
如果 $a>b$ 并且 $c<0$, 那么 $a\div c<b\div c$。

参考文献

现有的国家标准文档。

研究员提供给工作组的研究总结和简介。

国家评估管理委员会，《2009 年国家教育发展评估：数学框架》（*Mathematics Framework for the 2009 National Assessment of Educational Progress*）。U.S. Department of Education, 2008.

NAEP Validity Studies Panel, Validity Study of the NAEP Mathematics Assessment: Grades 4 and 8.Daro et al., 2007.

数学文档采自：阿尔伯塔，加拿大；比利时；中国；中国台北；丹麦；英国；芬兰；香港；印度；爱尔兰；日本；韩国；新西兰；新加坡；维多利亚（不列颠哥伦比亚）。

Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics. National Research Council, Mathematics Learning Study Committee, 2001.

Benchmarking for Success: Ensuring U.S. Students Receive a World-Class Education. National Governors Association, Council of Chief State School Officers, and Achieve, Inc., 2008.

Crossroads in Mathematics (1995) and *Beyond Crossroads* (2006).American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC).

Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence. National Council of Teachers of Mathematics, 2006.

Focus in High School Mathematics: *Reasoning and Sense Making*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA:NCTM.

*Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel.*U.S. Department of Education: Washington, DC, 2008.

Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework.

*How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.*Bransford, J.D., Brown, A.L., and Cocking, R.R., eds. Committee on Developments in the Science of Learning, Commission on Behavioral and Social Sciences and Education, National Research Council, 1999.

Mathematics and Democracy, The Case for Quantitative Literacy, Steen, L.A. (ed.).National Council on Education and the Disciplines, 2001.

Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity. Cross, C.T., Woods, T.A., and Schweingruber, S., eds. Committee on Early Childhood Mathematics, National Research Council, 2009.

The Opportunity Equation: Transforming Mathematics and Science Education for Citizenship and the Global Economy. The Carnegie Corporation of New York and the Institute for Advanced Study, 2009.Online: http://www.opportunityequation.org/

Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

The Proficiency Illusion. Cronin, J., Dahlin, M., Adkins, D., and Kingsbury, G.G.; foreword by C.E.Finn, Jr., and M. J. Petrilli.Thomas B. Fordham Institute, 2007.

Ready or Not: Creating a High School Diploma That Counts. American Diploma Project, 2004.

A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

Sizing Up State Standards 2008.American Federation of Teachers, 2008.

A Splintered Vision: An Investigation of U.S.Science and Mathematics Education. Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Raizen, S.A., et al. U.S. National Research Center for the Third International Mathematics and Science Study, Michigan State University, 1997.

Stars by Which to Navigate? Scanning National and International Education Standards in 2009.Carmichael, S.B., W.S.Wilson, Finn, Jr., C.E., Winkler, A.M., and Palmieri, S. Thomas B. Fordham Institute, 2009.

Askey, R., "Knowing and Teaching Elementary Mathematics," *American Educator*, Fall 1999.

Aydogan, C., Plummer, C., Kang, S. J., Bilbrey, C., Farran, D. C., & Lipsey, M. W.(2005).An investigation of prekindergarten curricula: Influences on classroom characteristics and child engagement. Paper presented at the NAEYC.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W. and Niss, M.(Eds) *Applications and Modeling in Mathematics Education*, ICMI Study 14.Amsterdam:Springer.

Brosterman, N.(1997).*Inventing kindergarten*. New York: Harry N. Abrams.

Clements, D. H., & Sarama, J.(2009).*Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A.-M.(2004).Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb and Moore, "Mathematics, Statistics, and Teaching," *Amer.Math.Monthly* 104(9), pp. 801-823, 1997.

Confrey, J., "Tracing the Evolution of Mathematics Content Standards in the United States: Looking Back and Projecting Forward."K12 Mathematics Curriculum Standards conference proceedings, February 5-6, 2007.Conley, D.T. *Knowledge and Skills for University Success*, 2008.

Conley, D.T. *Toward a More Comprehensive Conception of College Readiness*, 2007.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., and Mark, J., "Habits of Mind: An Organizing Principle for a Mathematics Curriculum," *Journal*

of Mathematical Behavior, 15(4), 375-402, 1996.
Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B.(1999).*Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. M.(2010).*Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Seventh ed.).Boston: Allyn and Bacon.
Ginsburg, A., Leinwand, S., and Decker, K., "Informing Grades 1-6 Standards Development: What Can Be Learned from High-Performing Hong Kong, Korea, and Singapore?"American Institutes for Research, 2009.
Ginsburg et al., "What the United States Can Learn From Singapore's World-Class Mathematics System (and what Singapore can learn from the United States)," American Institutes for Research, 2005.
Ginsburg et al., "Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from the 2003 TIMMS and PISA," American Institutes for Research, 2005.
Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Stevenson-Boyd, J.(2008).Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report*, 22(1), 1-24.
Harel, G., "What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question," in R. B. Gold and R. Simons (Eds.), *Current Issues in the Philosophy of Mathematics from the Perspective of Mathematicians*. Mathematical Association of America, 2008.
Henry, V. J., & Brown, R. S.(2008).First-grade basic facts: An investigation into teaching and learning of an accelerated, high-demand memorization standard. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 153-183.
Howe, R., "From Arithmetic to Algebra."
Howe, R., "Starting Off Right in Arithmetic," http://math.arizona.edu/~ime/2008-09/MIME/BegArith.pdf.
Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., and Locuniak, M. N., "Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes," *Dev.Psychol.*45, 850–867, 2009.
Kader, G., "Means and MADS," *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(6), 1999, pp. 398-403.
Kilpatrick, J., Mesa, V., and Sloane, F., "U.S. Algebra Performance in an International Context," in Loveless (ed.), *Lessons Learned: What International Assessments Tell Us About Math Achievement*. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 2007.
Leinwand, S., and Ginsburg, A., "Measuring Up: How the Highest Performing state (Massachusetts) Compares to the Highest Performing Country (Hong Kong) in Grade 3 Mathematics," American Institutes for Research, 2009.
Niss, M., "Quantitative Literacy and Mathematical Competencies," in *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Madison, B. L., and Steen, L.A. (eds.), National Council on Education and the Disciplines. Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C., December 1-2, 2001.
Pratt, C.(1948). I learn from children. New York: Simon and Schuster.
Reys, B. (ed.), *The Intended Mathematics Curriculum as Represented in State-Level Curriculum Standards: Consensus or Confusion?* IAP-Information Age Publishing, 2006.
Sarama, J., & Clements, D. H.(2009).*Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
Schmidt, W., Houang, R., and Cogan, L., "A Coherent Curriculum: The Case of Mathematics," *American Educator*, Summer 2002, p. 4.
Schmidt, W.H. and Houang, R.T., "Lack of Focus in the Intended Mathematics Curriculum: Symptom or Cause?" in Loveless (ed.), *Lessons Learned: What International Assessments Tell Us About Math Achievement*. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 2007.
Steen, L.A., "Facing Facts: Achieving Balance in High School Mathematics."*Mathematics Teacher*, Vol. 100.Special Issue. Wu, H., "Fractions, decimals, and rational numbers," 2007, http://math.berkeley.edu/~wu/ (March 19, 2008).
Wu, H., "Lecture Notes for the 2009 Pre-Algebra Institute," September 15, 2009.
Wu, H., "Preservice professional development of mathematics Teachers,"
http://math.berkeley.edu/~wu/pspd2.pdf.Massachusetts Department of Education. Progress Report of the Mathematics Curriculum Framework Revision Panel,
Massachusetts Department of Elementary and Secondary Education, 2009.
www.doe.mass.edu/boe/docs/0509/item5_report.pdf.
ACT College Readiness Benchmarks™
ACT College Readiness Standards™
ACT National Curriculum Survey™
Adelman, C. *The Toolbox Revisited: Paths to Degree Completion From High School Through College*, 2006.
*Advanced Placement Calculus, Statistics and Computer Science Course Descriptions. May 2009, May 2010.*College Board, 2008.
Aligning Postsecondary Expectations and High School Practice: The Gap Defined (ACT: Policy Implications of the ACT National Curriculum Survey Results 2005-2006).
Condition of Education, 2004:Indicator 30, Top 30 Postsecondary Courses, U.S. Department of Education, 2004.
Condition of Education, 2007:High School Course-Taking. U.S. Department of Education, 2007.
Crisis at the Core: Preparing All Students for College and Work, ACT.
Achieve, Inc., Florida Postsecondary Survey, 2008.
Golfin, Peggy, et. al.CNA Corporation. *Strengthening Mathematics at the Postsecondary Level: Literature Review and Analysis*, 2005.

Camara, W.J., Shaw, E., and Patterson, B.(June 13, 2009).First Year English and Math College Coursework. College Board: New York, NY (Available from authors).
CLEP Precalculus Curriculum Survey: Summary of Results. The College Board, 2005.
College Board Standards for College Success: Mathematics and Statistics. College Board, 2006.
Miller, G.E., Twing, J., and Meyers, J."Higher Education Readiness Component (HERC) Correlation Study."Austin, TX:Pearson.
On Course for Success: A Close Look at Selected High School Courses That Prepare All Students for College and Work, ACT.
Out of Many, One: Towards Rigorous Common Core Standards from the Ground Up. Achieve, 2008.
Ready for College and Ready for Work: Same or Different? ACT.
Rigor at Risk: Reaffirming Quality in the High School Core Curriculum, ACT.
The Forgotten Middle: Ensuring that All Students Are on Target for College and Career Readiness before High School, ACT.
Achieve, Inc., Virginia Postsecondary Survey, 2004.
ACT Job Skill Comparison Charts
Achieve, Mathematics at Work, 2008.
The American Diploma Project Workplace Study. National Alliance of Business Study, 2002.
Carnevale, Anthony and Desrochers, Donna. *Connecting Education Standards and Employment:Course-taking Patterns of Young Workers,* 2002.
Colorado Business Leaders Top Skills, 2006.
Hawai'i Career Ready Study: access to living wage careers from high school,
2007.States' Career Cluster Initiative. *Essential Knowledge and Skill Statements*,
2008.ACT WorkKeys Occupational Profiles™
Program for International Student Assessment (PISA), 2006.
Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS),
2007.International Baccalaureate, Mathematics Standard Level, 2006.
University of Cambridge International Examinations: General Certificate of Secondary Education in Mathematics,
2009.EdExcel, General Certificate of Secondary Education, Mathematics, 2009.
Blachowicz, Camille, and Peter Fisher."Vocabulary Instruction."In *Handbook of Reading Research*, Volume III, edited by Michael Kamil, Peter Mosenthal, P. David Pearson, and Rebecca Barr, pp. 503-523.Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000.
Gándara, Patricia, and Frances Contreras.*The Latino Education Crisis:The Consequences of Failed Social Policies.* Cambridge, Ma:Harvard University Press, 2009.
Moschkovich, Judit N."Supporting the Participation of English Language Learners in Mathematical Discussions."*For the Learning of Mathematics* 19 (March 1999):11-19.
Moschkovich, J. N. (in press).Language, culture, and equity in secondary mathematics classrooms.To appear in F. Lester & J. Lobato (Ed.), Teaching and Learning Mathematics:Translating Research to the Secondary Classroom*,* Reston, VA: NCTM.
Moschkovich, Judit N."Examining Mathematical Discourse Practices," *For the Learning of Mathematics* 27 (March 2007): 24-30.
Moschkovich, Judit N."Using Two Languages when Learning Mathematics:How Can Research Help Us Understand Mathematics Learners Who Use Two Languages?"*Research Brief and Clip*, National Council of Teachers of Mathematics, 2009 http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/Research_brief_12_Using_2.pdf. (accessed November 25, 2009).
Moschkovich, J.N.(2007) Bilingual Mathematics Learners:How views of language, bilingual learners, and mathematical communication impact instruction.In N. Nasir and P. Cobb (Eds.), *Diversity, Equity, and Access to Mathematical Ideas*.New York:Teachers College Press, 89-104.
Schleppegrell, M.J.(2007).The linguistic challenges of mathematics teaching and learning:A research review.*Reading & Writing Quarterly,* 23:139-159.
Individuals with Disabilities Education Act (IDEA), 34 CFR §300.34 (a).(2004).
Individuals with Disabilities Education Act (IDEA), 34 CFR §300.39 (b)(3).(2004).
Office of Special Education Programs, U.S.Department of Education."IDEA Regulations:Identification of Students with Specific Learning Disabilities," 2006.
Thompson, S. J., Morse, A.B., Sharpe, M., and Hall, S., "Accommodations Manual:How to Select, Administer and Evaluate Use of Accommodations and Assessment for Students with Disabilities," 2nd Edition.Council of Chief State School Officers, 2005.